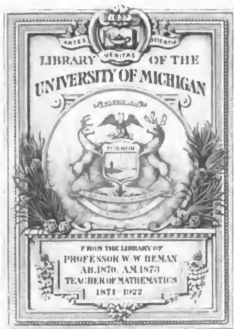

ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB. 1870. AM. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 1922

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

Von

Dr. M. Stern.

Besonders abgedruckt aus dem zehnten und elften Bande von „Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik."

Berlin.
Gedruckt und verlegt bei G. Reimer.
1834.

W. W. Beman
6-9/15-1923

710

Vorwort.

Die folgende Abhandlung verdankt ihre Entstehung einer Anzahl von Bemerkungen, die ich über die Theorie der Kettenbrüche zu machen Gelegenheit hatte. Diese Bemerkungen hängen aber so genau mit den Arbeiten Anderer über denselben Gegenstand zusammen, dafs, wenn ich mich mit blofsen Hinweisungen auf Letztere hätte begnügen wollen, meine Untersuchungen theils dunkel, theils völlig unverständlich geblieben wären. Ich habe es daher vorgezogen, das schon Bekannte mit dem, was mir neu zu sein schien, zu einem Ganzen zu verarbeiten. Überhaupt möchte es jetzt, bei der so überaus raschen Ausbreitung der Wissenschaft, kaum einer Entschuldigung bedürfen, wenn man es unternimmt, das Zerstreute zu sammeln: vielmehr ist es vielleicht eben so viel Verdienst, das schon Vorhandene zu ordnen, als Neues hinzuzufügen. Da ich gelegentlich die besten Schriften über Kettenbrüche angeführt habe, so wird es dem Leser leicht werden, das mir Eigene von dem Fremden zu unterscheiden. Auf die sehr werthvolle Schrift „*Specimen inaugurale de fractionibus continuis auctore* P. O. C. Vorsselman de Heer, *Trajecti ad Rhenum* 1833" konnte ich bei der Aus-

arbeitung keine Rücksicht nehmen, da sie mir erst zugekommen ist, als die ganze Abhandlung bereits völlig zum Druck ausgearbeitet, theilweise sogar schon gedruckt war; ich mufs mich daher damit begnügen, hier auf dieselbe aufmerksam zu machen. Dafs ich im fünften Kapitel Einiges aufgenommen habe, was nicht in enger Beziehung zu den Kettenbrüchen steht, wird die Wichtigkeit des Gegenstandes und das Bestreben, Etwas zur Wiederherstellung des Fourierschen Werkes beizutragen, hinlänglich rechtfertigen.

Göttingen, im September 1833.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

A. Allgemeine Eigenschaften der Kettenbrüche.

§. 1. Definition des Kettenbruchs. Theilbrüche.

§. 2. Entstehung des Kettenbruchs.

§. 3. Zwei Methoden, den Werth des endlichen Kettenbruchs zu finden. Reducirter Kettenbruch.

§. 4. Auffindung des Werthes eines Kettenbruchs auf independentem Wege.

§. 5. Anzahl der Glieder des Theilzählers. Auflösung einer davon abhängenden Aufgabe.

§. 6., 7., 8., 9. Allgemeine Formeln.

§. 10. Wann Zähler und Nenner eines Kettenbruchs einen gemeinschaftlichen Factor haben können.

§. 11. Von den Kettenbrüchen, deren Theilzähler und Theilnenner alle ganze positive Zahlen sind. Näherungsbrüche.

§. 12. und 13. Fortsetzung. Eingeschaltete Brüche.

§. 14. In welchem Falle zwei solche Kettenbrüche, deren Theilzähler gleich sind, gleichen Werth haben können.

§. 15. Eigenschaften der gewöhnlichen Kettenbrüche.

§. 16. Anwendung mehrerer Sätze auf die unendlichen Kettenbrüche.

B. Verwandlung der Kettenbrüche in andere.

§. 17. Neue Bezeichnung der Kettenbrüche.

§. 18. und 19. Mittel, einen Kettenbruch in einen andern zu verwandeln.

§. 20. Verwandlung der Kettenbrüche in andere, die nur ganze positive Theilzähler und Theilnenner haben.

§. 21. Multiplication und Division eines Kettenbruchs durch eine Zahl.

§. 22. Über den Fall, wenn ein Theilzähler $= 0$ ist.

§. 23. Über den Fall, wenn ein Theilnenner $= 0$ ist.

§. 24. Verwandlung eines Kettenbruchs in einen anderen, der m mal weniger Theilbrüche hat.

§. 25. Andere Verwandlungen.

§. 26. Bestimmung des Werthes von $1 : F(a, a_m)$ aus $F(a, a^m)$.

§. 27. Identität zweier besonderen Kettenbrüche.

C. Verwandlung der Kettenbrüche in Reihen.

§. 28. Einfachste Methode. Verwandlung der entstehenden Reihe in eine andere.
§. 29. Über die Convergenz einer besondern Art von Reihen.

Zweites Kapitel.

A. Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche.

§. 31. — 34. Erste Methode.
§. 35. — 45. Andere Methoden.
§. 46. Bemerkungen über diese Methoden.
§. 47. Verwandlung der Kettenbrüche in Reihen.

B. Ableitung der Kettenbrüche aus gewissen Reihen.

§. 48. Methode von Gaufs. Entwickelung dieser Methode.

Drittes Kapitel.

A. §. 49. Verwandlung der unendlichen Producte in Kettenbrüche.
B. §. 50. Verwandlung der Kettenbrüche in unendliche Producte.
§. 51. Einfachere Behandlung.

Viertes Kapitel.

§. 52. Summirung der Kettenbrüche.
§. 53. Convergirende, divergirende Kettenbrüche.
§. 54. — 62. Kennzeichen der Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche.
§. 63. Genauere Betrachtungen über die Summirung der Kettenbrüche.
§. 64. Über rationale und irrationale Kettenbrüche.
§. 65. Summation gewisser Kettenbrüche.
§. 66., 67. Summation des Kettenbruchs

$$0 - {}^{x}_{\infty}F[m+(n+x):(m+x+1)],$$

wenn m und n positiv und $n \geqq m+2$ ist.
§. 68. Summation dieses Kettenbruchs, wenn m negativ ist.
§. 69. Summation dieses Kettenbruchs, wenn $n < m+2$.
§. 70. Summation des Kettenbruchs

$$0 - {}^{x}_{\infty}F[m-(n+x):(m+x+1)].$$

§. 71. Summation anderer Kettenbrüche.
§. 72. Fälle, in welchen man nicht die Summe erhält.
§. 73. Summation einer besonderen Klasse von Kettenbrüchen.
§. 74. Kettenbrüche, deren Summation noch nicht bekannt ist.

Fünftes Kapitel.

A. Anwendung der Kettenbrüche zur Auflösung der Gleichungen.

§. 75. Über Lagrange's Methode.
§. 76. — 82. Bestimmung der Grenzen der Wurzeln nach Fourier.
§. 83. Über die verschiedenen Näherungsmethoden und die Entdeckung der imaginären Wurzeln.
§. 84. Näherung vermittelst Reihen.
§. 85. Anwendung der unendlichen Producte zur Auflösung der Gleichungen.
§. 86. Anwendung der Kettenbrüche zu diesem Zwecke. Brüche zu finden, die sich dem Werthe eines gröfseren so viel als möglich nähern.
§. 87. — 89. Fortsetzung.
§. 90. — 92. Entdeckung der imaginären Wurzeln.
§. 93. — 97. Weitere Ausbildung der Lagrangeschen Methode.
§. 98. Allgemeines Resultat der Untersuchung.

B. Anwendung der recurrirenden Reihen zur Auflösung der Gleichungen.

§. 99. Übersicht des bisher Geleisteten.
§. 100. Bestimmung der Werthe der reellen Wurzeln und Entdeckung der imaginären.
§. 101., 102. Bestimmung des Werthes der imaginären Wurzeln.
§. 103. Bemerkungen über diese Methode.

Sechstes Kapitel.

Fernere Anwendung der Kettenbrüche auf die Theorie der Gleichungen.

§. 104. Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, durch Kettenbrüche ausgedrückt.
§. 105. Wurzeln höherer Gleichungen, durch Kettenbrüche ausgedrückt.
§. 106. Andere Entwickelungen der Wurzeln quadratischer Gleichungen.
§. 107. Darstellung einer solchen Wurzel durch einen Kettenbruch, dessen Theilzähler alle $= 1$, dessen Theilnenner ganze positive Zahlen sind.
§. 108. Aus dem Werthe der einen Wurzel den Werth der andern zu finden.
§. 109. — 111. Besondere Fälle.
§. 112. Anwendung der Kettenbrüche auf die Cardanische Regel.

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Kettenbrüche auf die höhere Arithmetik.

§. 113. Auflösung der Gleichung $ax - by = c$.
§. 114. Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = D$, wenn $D < \sqrt{A}$ ist.

§. 115. Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$.

§. 116. Über den Zusammenhang der Zahl A mit den Theilnennern des $\sqrt{A}$ entsprechenden Kettenbruchs.

§. 116. *a*. Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$.

§. 117. Eigenschaften der Kettenbrüche, die einen mittleren Theilnenner haben. Jede Primzahl von der Form $4n+1$ ist die Summe zweier Quadrate. Genauere Bestimmung dieser Quadrate.

§. 118. Eigenschaften der Zahlen von der Form $8m+7$ und $8m+3$. Neues Hülfsmittel, die Primzahlen von der Form $4n+3$ zu entdecken.

§. 119. Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = n^2$ für einen besonderen Fall. Hülfsmittel, die Primzahlen von der Form $4n+1$ zu entdecken.

Zusätze.

Erstes Kapitel.

A. Allgemeine Eigenschaften der Kettenbrüche.

1.

Ein **Kettenbruch** (continuirlicher, zusammenhängender, stetiger Bruch) ist ein Bruch, dessen Nenner aus zwei Theilen, die durch + oder — verbunden sind, besteht, von welchen wenigstens der eine wieder ein Bruch ist. Bezeichnen daher die Buchstaben a, b, c, d beliebige Ausdrücke, so ist

$$1.\quad \frac{a}{b \pm \frac{c}{d}}$$

das allgemeine Schema eines Kettenbruchs. Zuweilen ist der Kettenbruch noch mit einem Ausdrucke A durch + oder — verbunden. Man nennt alsdann auch den Ausdruck

$$2.\quad A \pm \frac{a}{b \pm \frac{c}{d}}$$

einen *) Kettenbruch. In der Regel ist d wieder ein ähnliches Aggregat zweier Theile, von welchen wenigstens der eine ein Bruch ist, der Nenner des letztern wieder ein solches u. s. w., bis zu einer gewissen Gränze oder bis in das Unendliche. Im ersten Falle ist der Kettenbruch ein **endlicher**, im zweiten ein **unendlicher**. Kettenbrüche sind keine, ihrer Natur nach abgesonderte Art von Gröfsen; im Gegentheil kann ein Kettenbruch jede beliege Art von Gröfsen ausdrücken; nur ihre Form ist es, die sie zu einem besonderen Gegenstande der Betrachtung macht. Die einzelnen Brüche, aus welchen ein Kettenbruch zusammengesetzt ist, wie z. B. in (1.) $\frac{a}{b}$, nenne ich **Theilbrüche**, ihre Zähler, wie a, **Theilzähler**, ihre

*) Fast in allen Schriften ist die Definition der Kettenbrüche unbestimmt gegeben. So z. B. sagt Eytelwein (Grundlehren der höheren Analysis Th. 1. §. 247.): ein Kettenbruch ist ein solcher, dessen Zähler aus einer ganzen Zahl, der Nenner aber aus einer ganzen Zahl und einem Bruche u. s. w. besteht, während dort z. B. Brüche vorkommen, deren Zähler Wurzelgröfsen sind, wie in §. 320. Einen ähnlichen Fehler findet man in Kausler's „Lehre von den Kettenbrüchen."

Nenner, wie b, **Theilnenner.** Ist der Kettenbruch von der Form (2.), so nenne ich auch A einen Theilnenner.

2.

Man kann freilich bei Betrachtung der Kettenbrüche, diese als willkührlich gebildete Ausdrücke annehmen; aber wegen mancher folgenden Betrachtung ist es gut, sich ihre Entstehung auf folgende Weise zu denken. Es seien $A, B, C, D, E, \ldots, a, b, a', b', a'', b'', \ldots$ beliebige Ausdrücke, und $A = aB + bC$, $B = a'C + b'D$, $C = a''D + b''E$ u. s. w., so ist

$$\frac{A}{B} = a + \frac{bC}{B} = a + \frac{b}{B:C},$$
$$\frac{B}{C} = a' + \frac{b'D}{C} = a' + \frac{b'}{C:D},$$
$$\frac{C}{D} = a'' + \frac{b''E}{D} = a'' + \frac{b''}{D:E},$$

folglich $\frac{A}{B} = a + \cfrac{b}{a' + \cfrac{b'}{a'' + \cfrac{b''}{D:E}}}$, und man würde den Kettenbruch noch weiter führen können, wenn man, auf ähnliche Weise wie im Vorhergehenden, D aus E und F u. s. w. ableitete. Da nun a, b, a', b', u. s. w. jede Gröſse bezeichnen können, so darf man jeden Kettenbruch, als aus einer Reihe von Ausdrücken A, B, C u. s. w., die auf die bezeichnete Weise zusammenhängen, entstanden, betrachten. Es ist daher sehr leicht, einen gewöhnlichen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln. Ist z. B. der Bruch $\frac{45}{13}$ gegeben, so setze man $45 = 3.13 + 1.6$, $13 = 2.6 + 11$, $6 = 6.1 + 0$, also $\frac{45}{13} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}}$, oder man setze $45 = 2.13 + 1.19$, $13 = 1.19 - 1.6$, $19 = 3.6 + 1$, $6 = 6.1 + 0$, also $\frac{45}{13} = 2 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}}}$.

Auf ähnliche Weise könnte man noch andere Kettenbrüche erhalten, die dem Bruche $\frac{45}{13}$ gleich wären. Man sieht hieraus zugleich, daſs mehrere Kettenbrüche dem Werthe nach gleich sein können, ohne identisch zu sein.

3.

Es soll nun zuerst die Theorie der endlichen Kettenbrüche abgehandelt werden. Ein solcher hat, als abgeschlossener arithmetischer Ausdruck, im Allgemeinen, immer einen bestimmt angebbaren Werth, wiewohl dieser in einzelnen Fällen imaginair oder unendlich klein werden

kann *). Dieser Werth kann durch ein recurrirendes Verfahren auf doppeltem Wege gefunden werden. Es sei der **) Kettenbruch

$$3. \quad a+\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+ \\ \vdots \\ +\frac{b_{m-1}}{a_{m-1}}+\frac{b_m}{a_m}$$

gegeben, und a, b_1, a_1, ... im Allgemeinen unter sich verschiedene Gröfsen. Man verwandle zuerst den Theil $a+\frac{b_1}{a_1}$ in einen gewöhnlichen Bruch, und man erhält $a+\frac{b_1}{a_1}=\frac{aa_1+b_1}{a_1}$; für a_1 substituire man $a_1+\frac{b_2}{a_2}$, und man erhält $a+\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}=\frac{a\left(a_1+\frac{b_2}{a_2}\right)+b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2}}$; letzteren Werth verwandle man in einen gewöhnlichen Bruch und substituire in diesem für a_2 den Ausdruck $a_2+\frac{b_3}{a_3}$, und verfahre mit dem Resultate wie früher. Setzt man diese Operation fort, so erhält man zuletzt den Werth des ganzen gegebenen Kettenbruchs. Denselben Werth kann man aber auch finden, wenn man den Kettenbruch von unten herauf in einen gewöhnlichen verwandelt. Man hat zuerst $a_{m-1}+\frac{b_m}{a_m}=\frac{a_{m-1}a_m+b_m}{a_m}$; man substituire diesen Werth statt a_{m-1} in dem Bruche $a_{m-2}+\frac{b_{m-1}}{a_{m-1}}$, und man erhält $a_{m-2}+\frac{b_{m-1}}{a_{m-1}}+\frac{b_m}{a_m}=$ $a_{m-2}+\frac{b_{m-1}}{\frac{a_{m-1}\cdot a_m+b_m}{a_m}}$; letzteren Ausdruck verwandle man wieder in einen gewöhnlichen Bruch, und substituire den erhaltenen Werth statt a_{m-2} in dem Bruche $a_{m-3}+\frac{b_{m-2}}{a_{m-2}}$, und verwandle das Resultat wieder in einen gewöhnlichen Bruch. Führt man auf diese Weise fort, so mufs man, wie

*) Wie z. B. in den Brüchen $\frac{\sqrt{-1}}{a}+\frac{b}{c}$ oder $\frac{a}{b}+\frac{c}{0}$.

**) Wiewohl früher gesagt wurde, dafs die einzelnen Theilbrüche durch $+$ oder $-$ verbunden sein können, so drückt doch der Kettenbruch (3.) jeden beliebigen Kettenbruch aus, denn hätte man z. B. $a-\frac{b_1}{a_1}+\text{etc.}$, so wäre dies $=a+\frac{(-b_1)}{a_1}+\text{etc.}$, man mufs daher immer nur die Ausdrücke a, b_1 u. s. w. mit ihren Zeichen nehmen.

leicht einzusehen ist, den Werth des ganzen Kettenbruchs erhalten. Den Kettenbruch (3.) bezeichne ich durch $F(a, a_m)$, und den ihm gleichen gewöhnlichen Bruch nenne ich den reducirten *) Kettenbruch $F(a, a_m)$. Den Zähler dieses letzteren bezeichne ich durch a, a_m. Überhaupt soll auf ähnliche Weise $F(a_l, a_m)$ einen Kettenbruch bedeuten, dessen erster Theilnenner $= a_l$, dessen letzter $= a_m$ ist, und **) a_l, a_m ist der Zähler des reducirten Kettenbruchs $F(a_l, a_m)$. Der Nenner des reducirten Kettenbruchs $F(a, a_m)$ ist alsdann $= a_1, a_m$. Denn es ist $F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{F(a_1, a_m)}$; nun ist a_1, a_m der Zähler des reducirten Kettenbruchs $F(a_1, a_m)$; nennt man daher seinen Nenner p, so ist $F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{\frac{a_1, a_m}{p}} = \frac{a . a_1, a_m + b_1 . p}{a_1, a_m}$,

also $F(a, a_m) = \frac{a, a_m}{a_1, a_m}$. Ganz auf dieselbe Weise könnte man zeigen, dafs überhaupt $F(a_l, a_m) = \frac{a_l, a_m}{a_{l+1}, a_m}$ ist, d. h., wenn man die Kettenbrüche $F(a, a_m)$, $F(a_1, a_m)$, $F(a_2, a_m)$ u. s. w. in gewöhnliche Brüche verwandelt, so wird in diesen, der Nenner eines in der Reihe vorhergehenden der Zähler des folgenden sein. Da nun $F(a_1, a_m) = \frac{a_1, a_m}{a_2, a_m}$ ist, so wird $F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{\frac{a_1, a_m}{a_2, a_m}} = \frac{a . a_1, a_m + b_1 . a_2, a_m}{a_1, a_m}$ und $a, a_m = a . a_1, a_m + b_1 . a_2, a_m$.

Eben so kann man zeigen, dafs überhaupt

$$A. \quad a_l, a_m = a_l . a_{l+1}, a_m + b_{l+1} . a_{l+2}, a_m .$$

Hierdurch ist eine Recursionsformel gefunden, die der zweiten oben gegebenen rekurrirenden Reductionsmethode entspricht. Kennt man nemlich den reducirten Bruch $F(a_{l+1}, a_m)$, also dessen Zähler a_{l+1}, a_m und Nenner a_{l+2}, a_m, so kennt man zugleich den Nenner des reducirten Bruchs $F(a_l, a_m)$, und findet den Zähler durch die Formel ($A.$).

4.

Es ist wichtig, den Werth des Kettenbruchs $F(a, a_m)$ auch auf independentem Wege finden zu können, d. h. unmittelbar aus den Theilzählern

---

*) Es wird hierbei immer vorausgesetzt, dafs während und nach der Reduction keine etwa mögliche Zurückführung der Brüche auf kleinere Benennung vorgenommen wird. Wäre z. B. $F(a, a_m) = 1 + \frac{2}{4} + \frac{8}{7} = \frac{50}{36} = \frac{25}{18}$, so wäre a, a_m nicht $= 25$, sondern $= 50$.

**) Man bemerke, dafs $a_m, a_m = a_m$ ist. Hat der Kettenbruch nur zwei Theilnenner, a und a_1, so ist $a, a_m = a, a_1$; $a_1, a_m = a_1$.

und Theilnennern des Kettenbruchs den Zähler und Nenner des ihm gleichen gewöhnlichen Bruches abzuleiten. Hierzu führen folgende Betrachtungen. Man bilde zuerst die Zähler der Brüche $F(a_m, a_m)$, $F(a_{m-1}, a_m)$; diese sind bezüglich a_m und a_{m-1}, a_m. Man setze jedem Gliede des Ausdrucks a_{m-1}, a_m den Theilnenner a_{m-2}, und a_m den Theilzähler b_{m-1} vor, und addire die Producte, so hat man a_{m-2}, a_m (nach Formel A.). Setzt man jedem Gliede von a_{m-2}, a_m den Theilnenner a_{m-3}, jedem Gliede von a_{m-1}, a_m den Theilzähler b_{m-2} vor, so erhält man a_{m-3}, a_m, und wenn man auf diese Weise fortfährt, erhält man den Zähler des Bruches $F(a, a_m)$ und zugleich den Nenner, da man zugleich den Zähler des Bruches $F(a_1, a_m)$ bildet. Ist z. B. Zähler und Nenner des Kettenbruchs $F(a, a_4)$ zu finden, so hat man $a, a_4 =$

$$\begin{array}{|l|l|l|l|l}
a & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
a & a_1 & a_2 & & b_4 \\
a & a_1 & b_3 & & a_4 \\
a & b_2 & & a_3 & a_4 \\
a & b_2 & & & b_4 \\
b_1 & & a_2 & a_3 & a_4 \\
b_1 & & & a_2 & b_4 \\
b_1 & & & b_3 & a_4 \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{also } F(a, a_4) = \frac{a\ ,\ a_4}{a_1\ ,\ a_4}$$

$$= \frac{aa_1a_2a_3a_4 + aa_1a_2b_4 + aa_1b_3a_4 + ab_2a_3a_4 + ab_2b_4 + b_1a_2a_3a_4 + b_1a_2b_4 + b_1b_3a_4}{a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2a_4 + a_1b_3a_4 + b_2a_3a_4 + b_2b_4}.$$

Man kann den Werth a, a_m auch auf eine andere Weise finden. Es ist $a_{m-1}, a_m = a_{m-1}a_m + b_m$. Hier erhält man das zweite Glied, indem man im ersten für $a_{m-1}a_m$ den Werth b_m substituirt und dieses Resultat zum ersten Gliede addirt. Eben so ist

$$a_{m-2}, a_m = a_{m-2}a_{m-1}a_m + b_{m-1}a_m + b_m a_{m-2}.$$

Man denke sich nun das Product $a_{l+1} . a_{l+2} \ldots . a_m$, setze in demselben $a_{m-1}a_m = b_m$ und addire das entstehende Product zu dem vorigen, man substituire b_{m-1} statt $a_{m-2}a_{m-1}$ und addire das entstehende Product zu den vorigen. Auf dieselbe Weise fahre man fort, indem man überhaupt, wo es angeht, in den schon vorhandenen Gliedern b_{m-r+1} statt $a_{m-r}a_{m-r+1}$ setzt, und die erhaltenen Producte zu den früheren addirt, für r allmählig alle Werthe von 1 bis m setzend. Die Summe der enstehenden Producte, das erste $a_{l+1} \ldots . a_m$ mitgerechnet, sei $\overline{a_{l+1} \ldots . a_m}$. Dieselben Substitutio-

nen mache man in dem Producte $a_l \ldots a_m$, mit dem Unterschiede, dafs man noch in allen, auf diese Weise erhaltenen Producten, wo es angeht, den Werth b_{l+1} statt a_l, a_{l+1} setzt, und die so entstehenden Producte zu den schon vorhandenen addirt. Die Summe aller dieser Producte bezeichne man durch $\overline{a_l \ldots a_m}$, es ist also $\overline{a_l \ldots a_m} = a_l . \overline{a_{l+1} \ldots a_m} + b_{l+1} . \overline{a_{l+2} \ldots a_m}$. Nun ist aber auch $a_l, a_m = a_l . a_{l+1}, a_m + b_{l+1} . a_{l+2}, a_m$, und da $\overline{a_{m-1} . a_m} = a_{m-1}, a_m$; $\overline{a_{m-2} \ldots a_m} = a_{m-2}, a_m$, so mufs überhaupt $\overline{a_l \ldots a_m} = a_l, a_m$ sein. Um also z. B. den Werth von a, a_4 zu finden, schreibe man zuerst das Product $a . a_1 a_2 a_3 a_4$; man setze b_4 statt $a_3 a_4$, so hat man $a a_1 a_2 a_3 a_4 + a a_1 a_2 b_4$, dann setze man b_3 statt $a_2 a_3$, und man hat $a a_1 a_2 a_3 a_4 + a a_1 a_2 b_4 + a a_1 b_3 a_4$, dann b_2 statt $a_1 a_2$; dies giebt $a a_1 a_2 a_3 a_4 + a a_1 a_2 b_4 + a a_1 b_3 a_4 + a b_2 a_3 a_4 + a b_2 b_4$, endlich b_1 statt $a a_1$, und man erhält $a a_1 a_2 a_3 a_4 + a a_1 a_2 b_4 + a a_1 b_3 a_4 + a b_2 a_3 a_4 + a b_2 b_4 + b_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 a_2 b_4 b_1 b_3 a_4 = a, a_4$. Diese Methode läfst noch eine Abkürzung zu. Statt nemlich in den Gliedern, welche z. B. aus der Substitution $b_m = a_{m-1} a_m$ entstehen, für $a_{m-3} a_{m-2}$ den Werth b_{m-2} zu setzen, kann man unmittelbar in dem ersten Gliede $a a_1 \ldots a_m$, statt $a_{m-3} a_{m-2} a_{m-1} a_m$ den Werth $b_{m-2} b_m$ substituiren, und so in allen ähnlichen Fällen. Man kann also diese Methode auf folgende Weise bezeichnen. Will man den Werth von a, a_m finden, so wird sein erstes Glied $a . a_1 \ldots a_m$ sein; man setze $a a_1 = b_1$; $a_1 a_2 = b_2 \ldots a_{m-1} a_m = b_m$ und substituire diese Werthe allmählig in $a a_1 \ldots a_m$. Dadurch erhält man einen Theil des Resultats. Man mache aus den Elementen $b_1, b_2 \ldots b_m$ alle Combinationen der zweiten Classe ohne Wiederholung mit Weglassung aller Glieder, in welchen zwei auf einander folgende Elemente vorkommen, und unter derselben Einschränkung alle Combinationen ohne Wiederholung zur dritten, vierten u. s. w. Classe, und substituire die erhaltenen Formen statt der gleichgeltenden Producte in $a a_1 \ldots a_m$. Ist m eine ungrade Zahl, so mufs man alle Combinationsclassen bis zur $\frac{m+1}{2}^{\text{ten}}$, wenn m eine gerade Zahl ist, bis zur $\frac{m}{2}^{\text{ten}}$ bilden; im ersten Falle hat die letzte Classe nur ein Glied $b_1 b_3 \ldots b_m$, im zweiten zwei, $b_1 b_3 \ldots b_{m-1}$ und $b_2 . b_4 \ldots b_m$. Sucht man z. B. den Werth von a, a_4, so ist das erste Glied $a a_1 a_2 a_3 a_4$, und man erhält daraus die übrigen, indem man setzt, $a a_1 = b_1$; $a_1 a_2 = b_2$; $a_2 a_3 = b_3$, $a_3 a_4 = b_4$, $a a_1 a_2 a_3 = b_1 b_3$; $a a_1 a_3 a_4 = b_1 b_4$; $a_1 a_2 a_3 a_4 = b_2 b_4$, und diese Werthe allmählig in $a a_1 a_2 a_3 a_4$ substituirt.

Wollte man den Werth des Bruches $F(a_m, a)$, d. h. des Bruches $a_m + \frac{b_m}{a_{m-1}} +$ etc. finden, so ergiebt sich aus dem Obigen, daſs man den Zähler a_m, a finden wird, indem man als erstes Glied $a_m \ldots . a$ setzt, dann $a_m a_{m-1} = b_m$, $a_{m-1} a_{m-2} = b_{m-1}$ u. s. w. setzt, und mit den Elementen $b_m \ldots$ $\ldots b_1$, wie oben angegeben wurde, verführt. Hieraus sieht man, daſs die so entstehenden Glieder völlig denen des Werthes a, a_m gleich sind, und nur in anderer Ordnung erscheinen; man hat daher *) $(B.)$ $a, a_m = a_m, a_1 \ldots .$

5.

Die Formel $A.$ zeigt, daſs die Anzahl der Glieder, die den Zähler a, a_m ausmachen, so groſs sein muſs, als die Anzahl der Glieder, die a_1, a_m ausmachen, und der, die a_2, a_m ausmachen, zusammengenommen. Denkt man sich die Zahlen, welche die Anzahl der in a_m; a_{m-1}, a_m; a_{m-2}, a_m; $\ldots . a, a_m$ enthaltenen Glieder angeben, in einer Reihe verbunden, so ist diese eine recurrirende, in der jedes Glied die Summe der zwei vorhergehenden ist; die Zahl der in a_m, a_{m-1}, a_m enthaltenen Glieder ist bezüglich 1 und 2, also die Reihe $1, 2, 1+2, 3+2, 5+3 \ldots .$ Diese Reihe ist als einzelner Fall in der Reihe a, bx, $(a+b)x^2$, $(a+2b)x^3$, $(2a+3b)x^4$ enthalten, wenn man in letzter $a = x = 1$, $b = 2$ setzt; und letztere ergiebt sich, wenn alle Glieder mit $+$ verbunden sind, aus dem Quotienten $\frac{a+(b-a)x}{1-x-x^2}$. Will man also die Anzahl der in a, a_m enthaltenen Glieder finden, so braucht man nur das $m$te Glied der aus diesem Quotienten entspringenden Reihe zu suchen, indem man das Anfangsglied a nicht mitzählt, und dann $a = x = 1$, $b = 2$ zu setzen. Dieses Glied ist $=$ **) $x^m [p^m C . a + p^{m-1} C . (b-a)]$, wenn man unter $p^m C$, $p^{m-1} C$ alle Combinationen aus den Elementen 1, 2 zur Summe m mit vorgesetzter Permutationszahl versteht, und also die Summe der Glieder von a, $a_m = p^m C +$ $p^{m-1} C$. Nun wird

---

*) Es sei ein Kettenbruch $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ gegeben; man soll einen anderen finden, in dem die Theilzähler und Theilnenner in umgekehrter Ordnung erscheinen; der zweite Kettenbruch ist also $= \frac{a_m, a}{a_{m-1}, a} = \frac{a, a_m}{a, a_{m-1}}$. Ist z. B. $\frac{a, a_m}{a_1, a_m} = 1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7}}} =$ $\frac{233}{151}$, so ist $a, a_m = 233$, $a, a_{m-1} = 29$ und $\frac{233}{29} = 7 + \frac{6}{5 + \frac{4}{3 + \frac{2}{1}}}$.

**) Man vergl. Thibaut's Analysis 2te Ausg. S. 42.

$$p^{m}C = 1 + m - 1 + \frac{m-3.m-2}{1.2} + \frac{m-5.m-4.m-3}{1.2.3} + \frac{m-7.m-6.m-5.m-4}{1.2.3.4} \text{ etc.}$$

$$p^{m-1}C = \quad 1 + \quad m-2 + \frac{m-4.m-3}{1.2} + \frac{m-6.m-5.m-4}{1.2.3} \text{ etc.}$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder, und bemerkt, dafs $\frac{m-n.m-n+1 \ldots m-n+r}{1.2 \ldots . r+1} + \frac{m-n+1 \ldots m-n+r}{1.2 \ldots . r} = \left(\frac{m-n}{r+1}+1\right)\left(\frac{m-n+1 \ldots m-n+r}{1 \ldots . 2r}\right)$ $= \frac{m-n+1 \ldots . m-n+r+1}{1.2 \ldots . r+1}$ ist, so findet man die Summe der Glieder von a, $a_m = 1 + m + \frac{m-2.m-1}{1.2} + \frac{m-4.m-3.m-2}{1.2.3}$ etc.

Man kann diese Summe auch finden, ohne auf die Theorie der recurrirenden Reihen einzugehen, und zwar unmittelbar aus dem independenten Verfahren, durch welches früher der Werth von a, a_m gefunden wurde. Den Ausdruck $a.a_1 \ldots . a_m$ giebt ein Glied der Summe, dann hat man so viel Glieder als Theilzähler vorhanden sind, hier m Glieder, ferner so viel Glieder als aus m Elementen Combinationen zur zweiten Classe ohne Wiederholung gebildet werden können. Ohne Einschränkung wäre deren Anzahl $\frac{m.m-1}{1.2}$; da aber in den Combinationen, die mit b_1 anfangen, nicht b_2, in denen, die mit b_2 anfangen, nicht b_3 u. s. w. vorkommen kann, so wird die Zahl der entstehenden Combinationen dieselbe sein, als wenn nur aus $m-1$ Elementen alle Combinationen zur zweiten Classe gebildet würden, also $\frac{m-1.m-2}{1.2}$. Auf dieselbe Weise findet man, dafs, unter der erwähnten Einschränkung, die Anzahl der Combinationen zur dritten Classe aus m Elementen, dieselben ist wie die Summe aller Combinationen zur dritten Classe aus $m-2$ Elementen, da in den Gliedern, die mit b_1 anfangen, nicht b_2 und b_3, b_3 und b_4 etc., in denen, die mit b_2 anfangen, nicht b_3 und b_4, b_4 und b_5 etc. zusammen vorkommen dürfen, also $= \frac{m-2.m-3\ m-4}{1.2.3}$. Führt man auf diese Weise fort, so sieht man, dafs mit der erwähnten Einschränkung so viel Glieder in der $r$ten Combinationsclasse aus m Elementen enthalten sind, als ohne dieselben in derselben Classe aus $m-r+1$ Elementen, und man findet dann die entstehende Summe mit der oben gegebenen übereinstimmend, sieht aber zugleich, wie die einzelnen Glieder derselben entstehen. Hieraus ergiebt sich zugleich ein Mittel, eine andere Aufgabe mit Leichtigkeit zu lösen, nämlich wenn der Kettenbruch $F(a, a_m)$ gegeben ist, und alle Theilnenner identisch, also $= a$ sind, eben so alle

Theilzähler $= b_1$, den Werth des Bruches aus den drei Gröſsen a, b_1, m zu finden. Hier ist $a \ldots . a_m = a^{m+1}$, $a . a_1 \ldots . a_{m-2} = a . a_1 \ldots . a_{m-3} . a_m$ etc. $= a^{m-1}$ etc. Man kann also alle Glieder, in welchen die Theilzähler zu Combinationen derselben Classe gehören, zusammenfassen und erhält

$$a,\ a_m = a^{m+1} + m . b_1 . a^{m-1} + \frac{m-1 . m-2}{1.2} b_1^2 . a^{m-3} \text{ etc.}$$

eben so

$$a_1,\ a_m = a,\ a_{m-1} = a^m + m - 1 . b_1 . a^{m-2} + \frac{m-2 . m-3}{1.2} b_1^2 . a^{m-4} \text{ etc.}$$

Da die Ausdrücke $a_m;\ a_{m-1},\ a_m;\ \ldots .\ a,\ a_m$ in diesem Falle eine recurrirende Reihe bilden, indem man jedes Glied $a_l,\ a_m$ aus den zwei vorhergehenden durch die Formel $a_l,\ a_m = a . a_{l+1},\ a_m + b_1 . a_{l+2},\ a_m$ findet, so könnte man auch den Werth von $a,\ a_m$ finden, wenn man das $m$te Glied nach dem Anfangsgliede der aus dem Quotienten $\frac{a + b_1 x}{1 - ax - b_1 x^2}$ entspringenden Reihe entwickelte und $x = 1$ setzte, was ich jedoch hier nicht weiter ausführen will. Einen anderen Ausdruck für $a,\ a_m$ findet man aber auf folgende Weise. Man bilde aus den Gliedern $1;\ a_m;\ a_{m-1},\ a_m \ldots .$ eine Reihe, deren erste Glieder im vorliegenden Falle 1, a, $a^2 + b$ sein werden, und vermöge des Gesetzes wie sich jedes Glied aus den zwei vorhergehenden bildet, werden die Glieder dieser Reihe den successiven Gliedern der aus dem Quotienten $\frac{1}{1 - ax - bx^2}$ entspringenden gleich sein, wenn man $x = 1$ setzt, und zwar wird das $m + 1$te nach dem Anfangsgliede den Werth von $a,\ a_m$ geben. Nun ist

$$\frac{1}{1 - ax + bx^2} = \frac{[a + \sqrt{(a^2 + 4b)}] : 2\sqrt{(a^2 + 4b)}}{1 - \left(\frac{a + \sqrt{(a^2 + 4b)}}{2}\right) x} + \frac{[-a + \sqrt{(a^2 + 4b)}] : 2\sqrt{(a^2 + 4b)}}{1 - \left(\frac{a - \sqrt{(a^2 + 4b)}}{2}\right) x}.$$

Da nun das $m$te Glied der aus dem Quotienten $\frac{A}{1 - Bx}$ entspringenden Reihe $AB^m x^m$ ist, so ist *) das $m$te Glied der aus $\frac{1}{1 - ax - bx^2}$ entspringenden Reihe, wenn man $x = 1$ setzt:

$$\frac{a + \sqrt{(a^2 + 4b)}}{2\sqrt{(a^2 + 4b)}} \times \left(\frac{a + \sqrt{(a^2 + 4b)}}{2}\right)^m + \frac{\sqrt{(a^2 + 4b)} - a}{2\sqrt{(a^2 + 4b)}} \times \left(\frac{a - \sqrt{(a^2 + 4b)}}{2}\right)^m,$$

oder da $\frac{a + \sqrt{(a^2 + 4b)}}{2} = \frac{1}{2} a + \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b)}$,

$$= \frac{[\frac{1}{2} a + \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b)}]^{m+1}}{2\sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b)}} + \frac{[\sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b)} - \frac{1}{2} a]^{m+1}}{2\sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b)}},$$

*) Man vergl. Euler *Introd. in anal. infinit. Cap.* 13.

und das $m+1$te Glied, d. h.

$$a,\ a_m = \frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}}$$

und

$$F(a,\ a_m) = \frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m} = \frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_{m-1}} = \frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+1}}{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+1}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+1}}\ ^{*}).$$

Setzt man $a=b=1$, so wird $a,\ a_m = 1+m+\frac{m-2.m-1}{1.2}$ etc. Diese Summe drückt aber auch die Zahl der in $a,\ a_m$ enthaltenen Glieder aus, folglich ist diese $= \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right)^{m+2}}{\sqrt{5}}$ **)**.

---

*) Für den Fall, wenn $b_1 = 1$ ist, hat schon Herr Clausen die entsprechende Formel gegeben, Journ. für die reine und angew. Math. Bd. 3. S. 88. und früher Dan. Bernoulli in den *Nov. com. ac. petr.* T. 20. in einer Abhandlung *de fract. cont. pag.* 10.

**) Die Vergleichung der zwei gleichen Ausdrücke

$$a^{m+1}+m.b_1.a^{m-1}\ \ldots = \frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}}$$

führt zu mehreren merkwürdigen, auch sonst bekannten, und auf andere Weise bewiesenen Summationen von Reihen, die aus Binomialcoefficienten bestehen. Man setze $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)} = x$, und nenne den $r$ten Binomialcoefficienten der $m+2$ten Potenz, ${}^{r}\overset{m+2}{\mathfrak{B}}$, so findet man durch die gewöhnlichen Regeln des Potenziirens

$$\frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}^{m+2}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}}$$

$$= {}^{1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}}\left(\frac{a}{2}\right)^{m+1} + {}^{1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}}\left(\frac{a}{2}\right)^{m-1}x^2 + {}^{5}\overset{m+1}{\mathfrak{B}}\left(\frac{a}{2}\right)^{m-3}x^4 + \ldots \quad (a).$$

Nun ist $x^2 = \frac{1}{4}a^2+b$, $x^4 = \frac{a^4}{2^4}+2.\frac{a^2}{2^2}.b+b^2$ etc. Substituirt man diese Werthe statt x^2, x^4 etc. in die Reihe (a), so ist

$$\begin{array}{l|l|l}
{}^{1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} & \left(\frac{a}{2}\right)^{m+1} + {}^{3}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} & b.\left(\frac{a}{2}\right)^{m-1} + \ldots \qquad (a') \text{ und } (a') = (a). \\
+\,{}^{3}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} & \quad +2\,{}^{5}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} & \\
+\,{}^{5}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} & \quad + & \\
+ & \quad \vdots & \\
\vdots & &
\end{array}$$

Man findet leicht bei einiger Aufmerksamkeit, daſs das $r$te Glied der Reihe (a'),
$= ({}^{2r-1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + .\ {}^{2}\overset{r}{\mathfrak{B}}.{}^{2r+1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + {}^{2}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}.{}^{2r+3}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + \ldots) \times \left(\frac{a}{2}\right).^{m+3-2r}b^{r-1}$. Das $r$te Glied der Reihe $a^{m+1}+m.b\ a^{m-1}\ \ldots$ ist ${}^{r-1}\overset{m-r+2}{\mathfrak{B}}.a^{m+3-2r}\,b^{r-1}$, hieraus folgt

$${}^{2r-1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + {}^{2}\overset{r}{\mathfrak{B}}.{}^{2r+1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + {}^{2}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}.{}^{2r+3}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + \ldots = {}^{r-1}\overset{m-r+2}{\mathfrak{B}}.2^{m+3-2r}.$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man andere ähnliche Reihen, die ich jedoch an dieser Stelle nicht weiter verfolgen will.

6.

Setzt man nach der früher angenommenen Bezeichnung, den Bruch $a_m + \frac{b_m}{a_{m-1}} + \cdots + \frac{b_1}{a} = F(a_m, a)$, den Zähler des reducirten Bruches $F(a_m, a) = a_m, a$, den Nenner $= a_{m-1}, a$, und allgemein den Bruch $a_m + \frac{b_m}{a_{m-1}} + \cdots + \frac{b_l}{a_{l-1}} = F(a_m, a_{l-1})$, dessen Zähler a_m, a_{l-1} und Nenner a_m, a_l, so findet man (nach Form. *A.*), $a_m, a = a_m . a_{m-1}, a + b_m . a_{m-2}, a$. Nun ist $a_m, a = a, a_m$; $a_{m-1}, a = a, a_{m-1}$; $a_{m-2}, a = a, a_{m-2}$, folglich $a, a_m = a_m . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2}$, und auf dieselbe Weise kann man zeigen, dafs überhaupt

$$C. \qquad a_l, a_m = a_m . a_l, a_{m-1} + b_m . a_l, a_{m-2}.$$

Hierdurch ist eine Recursionsformel gegeben, die dem ersten in (1.) gegebenen recurrirenden Verfahren entspricht. Kennt man nemlich den reducirten Bruch $F(a_l, a_{m-2})$ und $F(a_l, a_{m-1})$, also deren Zähler a_l, a_{m-2}; a_l, a_{m-1}, so zeigt die Formel (*C.*), wie man aus diesen den Zähler des Bruches a_l, a_m ableitet.

7.

Es ist $F(a, a_{m+n}) = a + \frac{b_1}{a_1} + \cdots + \frac{b_m}{F(a_m, a_{m+n})}$, folglich (nach Form. *C.*)

$$F(a_m, a_{m+n}) = \frac{F(a_m, a_{m+n}) . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2}}{F(a_m, a_{m+n}) . a_1, a_{m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}} = \frac{a, a_{m+n}}{a_1, a_{m+n}};$$

nun ist $F(a_m, a_{m+n}) = \frac{a_m, a_{m+n}}{a_{m+1}, a_{m+n}}$, substituirt man diesen Werth, so findet man nach gehöriger Reduction:

$$a, a_{m+n} = a_m, a_{m+n} . a, a_{m-1} + b_m . a_{m+1}, a_{m+n} . a, a_{m-2},$$

und überhaupt, wenn $l < m - 1$ ist:

$$D. \qquad a_l, a_{m+n} = a_l, a_{m-1} . a_m, a_{m+n} + b_m . a_l, a_{m-2} . a_{m+1} . a_{m+n}.$$

Diese Formeln zeigen, wie man den reducirten Kettenbruch $F(a, a_{m+n})$ finden kann, wenn die reducirten Kettenbrüche $F(a_m, a_{m+n}) = \frac{a_m, a_{m+n}}{a_{m+1}, a_{m+n}}$, $F(a, a_{m-1}) = \frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}}$, $F(a, a_{m-2}) = \frac{a, a_{m-2}}{a_1, a_{m-2}}$ gegeben sind.

8.

Aus $a, a_m = a \cdot a_1, a_m + b_1 \cdot a_2, a_m$ und $a_1, a_m = a \cdot a_1, a_{m-1} + b_1 \cdot a_2, a_{m-1}$ folgt $a, a_m \cdot a_1, a_{m-1} - a_1, a_m \cdot a, a_{m-1} = -b_1 (a_1, a_m \cdot a_2, a_{m-1} - a_2, a_m \cdot a_1, a_{m-1})$; auf dieselbe Weise findet man

$$a_1, a_m \cdot a_2, a_{m-1} - a_2, a_m \cdot a_1, a_{m-1} = -b_2 (a_2, a_m \cdot a_3, a_{m-1} - a_3, a_m \cdot a_2, a_{m-1});$$

führt man so fort, so findet man, dafs überhaupt

$$a, a_m \cdot a_1, a_{m-1} - a_1, a_m \cdot a, a_{m-1} = \pm b_1 \cdot b_2 \ldots . b_m$$

ist, wo das obere oder untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem die Anzahl der Theilzähler ungrade oder gerade ist, weil

$$a_{m-1}, a_m + b_m - a_{m-1} \cdot a_m = + b_m$$

ist, dieses aber der letzte in den Klammern enthaltene Ausdruck sein wird, da dieser im Allgemeinen der Zähler des Ausdrucks

$$[F(a_l, a_m) - F(a_l, a_{m-1})]$$

ist, der letzte also $a_{m-1}, a_m - a_{m-1} \cdot a_m$ sein wird.

Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dafs überhaupt

$$E. \qquad a_l, a_m \cdot a_{l+1}, a_{m-1} - a_{l+1}, a_m \cdot a_l, a_{m-1} = \pm b_{l+1} \ldots . b_m \text{ ist.}$$

Hat man also zwei Brüche $F(a_l, a_m)$, $F(a_l, a_{m-1})$, und zieht diese von einander ab, so ist der Zähler des Resultats dem Producte aller im Bruche $F(a_l, a_m)$ enthaltenen Theilzähler, ohne Rücksicht auf das Zeichen, gleich. Hieraus folgt zugleich, dafs Zähler und Nenner eines reducirten Kettenbruchs keinen gröfseren gemeinschaftlichen Factor haben können, als das Product der in dem Bruche enthaltenen Theilzähler, denn hätten z. B. a, a_m und a_1, a_m einen solchen, so wäre das erste Glied der Gleichung $a, a_m \cdot a_1, a_{m-1} - a_1, a_m \cdot a, a_{m-1} = b_1 \ldots . b_m$ durch diesen theilbar und das zweite nicht, was unmöglich ist *).

9.

Aus der Formel (*D.*) folgt auf dieselbe Weise:

$$a, a_{m+n} \cdot a_1, a_{m-1} - a_1, a_{m+n} \cdot a, a_{m-1} =$$
$$b_m (a_{m+1}, a_{m+n}) \times (a, a_{m-2} \cdot a_1, a_{m-1} - a, a_{1-m} \cdot a_1, a_{m-2}),$$

nun ist (nach Form. *E.*)

$$a, a_{m-1} \cdot a_1, a_{m-2} - a, a_{m-2} \cdot a_1, a_{m-1} = \pm b_1 \ldots . b_{m-1},$$

folglich

$$[F(a, a_{n+m}) - F(a, a_{m-1})] \times (a_1, a_{n+m} \cdot a_1, a_{m-1}) =$$
$$a, a_{n+m} \cdot a_1, a_{m-1} - a_1, a_{n+m} \cdot a, a_{m-1} = \mp a_{m+1}, a_{m+n} (b_1 \ldots . b_m),$$

---

*) Sind die Theilzähler eines Bruches alle $= \pm 1$, so hat also Zähler und Nenner des reducirten Bruches gar keinen gemeinschaftlichen Factor, oder Zähler und Nenner sind alsdann Primzahlen zu einander.

und allgemein, wenn $l < m - 1$ ist,

$$F. \quad a_l, a_{m+n} . a_{l+1}, a_{m-1} - a_{l+1}, a_{m+n} . a_l, a_{m-1} = \pm a_{m+1}, a_{m+n}(b_{l+1} \dots . b_m).$$

Es sei $p < m + n$ und $> m$, so giebt die Formel ($D.$)

$$a, a_p = a, a_{m-1} . a_m, a_p + b_m . a, a_{m-2} . a_{m+1}, a_p;$$

verbindet man diese Formel mit der Formel ($D.$), so findet man

$$a, a_{m+n} . a_m, a_p - a, a_p . a_m, a_{m+n} =$$

$$b_m . a, a_{m-2} (a_{m+1}, a_{m+n} . a_m, a_p - a_{m+1}, a_p . a_m, a_{m+n}),$$

oder (nach Form. $F.$)

$$G. \quad = \mp b_m . a, a_{m-2} . (b_{m+1} \dots . b_{p+1})\ ^{*}).$$

10.

Es wurde im Vorhergehenden immer vorausgesetzt, dafs während und nach der Verwandlung des Kettenbruchs in einen gewöhnlichen Bruch, kein gemeinschaftlicher Factor des Zählers und Nenners der erhaltenen Brüche ausgelassen worden sei (§. 3.); es frägt sich nun, unter welchen Umständen ein solcher Factor möglich ist.

Die Formel ($A.$) giebt: $\frac{a_l, a_m}{a_{l+1}, a_m} = a_l + \frac{b_{l+1} . a_{l+2}, a_m}{a_{l+1}, a_m}$; haben also Zähler und Nenner des reducirten Bruches $F(a_{l+1}, a_m)$, und b_{l+1} und der Zähler dieses Bruches keinen gemeinschaftlichen Factor, so haben auch Zähler und Nenner des reducirten Bruches $F(a_l, a_m)$ keinen solchen. Der reducirte Kettenbruch $F(a, a_m)$ wird also immer auf seine kleinste Benennung gebracht sein, wenn alle Theilzähler $= \pm 1$ sind, da Zähler und Nenner des Bruches $F(a_{m-1}, a_m)$, die bezüglich $a_{m-1} . a_m + 1$ und a_m sind, keinen gemeinschaftlichen Factor haben (vergl. §. 8. Anmerk.). Haben Zähler und Nenner des Bruches $F(a_l, a_m)$ d. h. $a_l . a_{l+1}, a_m + b_{l+1} . a_{l+2}, a_m$ und a_{l+1}, a_m keinen gemeinschaftlichen Factor, so haben auch $a_{l+1} a_m$ und a_{l+2}, a_m d. h. Zähler und Nenner des Kettenbruchs $F(a_{l+1}, a_m)$ keinen solchen, also überhaupt auch nicht Zähler und Nenner des Bruches $F(a_{l+r}, a_m)$. Ist dagegen der reducirte Kettenbruch $F(a_{l+1}, a_m)$ nicht auf seine kleinste Benennung gebracht, so wird dies auch bei dem Kettenbruche $F(a_l, a_m)$ der Fall sein, und überhaupt werden alsdann Zähler und Nenner des Kettenbruchs $F(a, a_m)$ denselben gemeinschaftlichen Factor

---

*) Die Formeln ($F.$) und ($G.$) enthalten als einzelne Fälle alle Formeln, die Euler (*Nov. comm. petr. T. IX. pag.* 53. *seq.*) und Kramp (*Elem. d'Arithm. univ. l.* 8.) gegeben haben. Aus ($B.$) und ($E.$) folgen auch die Formeln, die Gaufs (*Disq. arithm. pag.* 17. *not.*) gegeben hat.

enthalten, wie $F(a_l, a_m)$. Haben die Gröfsen b_{m+1}, a_{m+1}, b_{m+2}, einen gemeinschaftlichen Factor, so werden auch Zähler und Nenner des Bruches $F(a, a_{m+n})$ einen solchen und zwar denselben haben, denn es sei $b_{m+n} = Ap$, $a_{m+1} = Aq$, $b_{m+2} = Ar$, $a_{m+2}, a_{m+n} = s$, $a_{m+3}, a_{m+n} = t$, so ist

$$F(a_m, a_{m+n}) = a_m + \cfrac{Ap}{Aq + \cfrac{Ar}{s:t}} = \frac{a_m . A(qs + rt) + Aps}{A(qs + rt)},$$

da also Zähler und Nenner des Bruches $F(a_m, a_{m+n})$ den gemeinschaftlichen Factor A haben, so müssen auch, wie eben gezeigt wurde, Zähler und Nenner des reducirten Kettenbruches $F(a, a_{m+n})$ denselben gemeinschaftlichen Factor haben. Hieraus folgt, dafs man in jedem Kettenbruche, seines Werthes unbeschadet, die drei auf einander folgenden Gröfsen b_l, a_l, b_{l+1} mit einer beliebigen Gröfse multipliciren oder dividiren kann.

Sind a_{m+1}, b_m, a_m ungrade Zahlen, b_{m+1} eine gerade Zahl, so hat der reducirte Bruch (a, a_m) in Zähler und Nenner den Factor 2. Denn es ist $a_{m-2}, a_m = a_{m-2} . (a_{m-1} . a_m + b_m) + a_m . b_{m-1}$; $a_{m-1}, a_m = a_{m-1} . a_m + b_m$, also haben Zähler und Nenner des Bruches $F(a_{m-2}, a_m)$, folglich auch die des Bruches a, a_m den gemeinschaftlichen Factor 2.

Ist $b_m = r . a_{m-1}$, $a_m = b_{m-1} - r$, so haben Zähler und Nenner des reducirten Bruches $F(a_{m-2}, a_m)$ und daher auch Zähler und Nenner des reducirten Bruches $F(a, a_m)$ den gemeinschaftlichen Factor b_{m-1}. Denn es ist

$$F(a_{m-2}, a_m) = a_{m-2} + \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} + \cfrac{r . a_{m-1}}{b_{m-1} - r}} = \frac{a_{m-2} . b_{m-1} . a_{m-1} + b_{m-1} . (b_{m-1} - r)}{b_{m-1} . a_{m-1}},$$

Von den Kettenbrüchen, deren Theilzähler und Theilnenner alle ganze positive Zahlen sind.

11.

Unter den besonderen Fällen, welche die oben gegebene Theorie umfafst, ist besonders der wichtig, wenn alle Theilzähler und Theilnenner ganze positive Zahlen, und die einzelnen Theilbrüche mit dem + Zeichen verbunden sind, da später gezeigt werden soll, dafs sich auf solche Brüche alle andern zurückführen lassen, deren Theilzähler oder Theilnenner alle oder theilweise gebrochene rationale Zahlen, und deren Theilbrüche alle oder theilweise mit dem — Zeichen verbunden sind. Die Formel ($A.$) zeigt, dafs bei solchen Brüchen, Zähler und Nenner eines jedes folgenden reducirten Bruches in der Reihe $F(a, a_m)$, $F(a_1, a_m)$, $F(a_2, a_m)$ .... klei-

ner werden, als die der vorhergehenden, daſs überhaupt $a_{l+1}, a_m < a_l, a_m$ ist; eben so folgt aus Formel ($B.$), daſs $a, a_m > a, a_{m-1}$ ist. Hiernach findet man durch Formel ($F.$), daſs die Brüche

$$F(a, a) = \frac{a}{1}, \; F(a, a_1), \; F(a, a_2) \ldots.$$

sich dem Werthe des Bruches $F(a, a_{m+n})$ immer mehr nähern, und abwechselnd kleiner oder gröſser als derselbe werden. Denn nimmt man zwei in der Reihe auf einander folgende Brüche $F(a, a_l)$, $F(a, a_{l+1})$, so hat man

$$1. \quad F(a, a_{m+n}) - F(a, a_l) = \pm \frac{a_{l+2}, a_{m+n} (b_1 \ldots . b_{l+1})}{a_1, a_{m+n} . a_1, a_l},$$

$$2. \quad F(a, a_{m+n}) - F(a, a_{l+1}) = \pm \frac{a_{l+3}, a_{m+n} . b_1 \ldots . b_{l+2}}{a_1, a_{m+n} . a_1, a_{l+1}}.$$

Da nun $a_{l+3}, a_{m+n} < a_{l+2}, a_{m+n}$; $a_1, a_l < a_1, a_{l+1}$ ist, so ist ohne Rücksicht auf das Zeichen (2.) $<$ (1.), also $F(a, a_{l+1})$ dem Werthe von $F(a, a_{m+n})$ näher als $F(a, a_l)$, und da (1.) und (2.) entgegengesetzte Zeichen haben, so ist $F(a, a_{l+1}) \gtrless F(a, a_{m+n})$, je nachdem $F(a, a_l) \lessgtr F(a, a_{m+n})$ ist. Man nennt deswegen die Brüche $F(a, a)$, $F(a, a_1)$ etc. Näherungsbrüche von $F(a, a_{m+n})$. Nennt man $F(a, a) = a$ den ersten Näherungsbruch, $F(a, a_1)$ den zweiten, etc., so kann man sagen: alle Näherungsbrüche, deren Stelle gerade ist, sind gröſser, alle, deren Stelle ungrade ist, kleiner als der ganze Kettenbruch.

Es ist leicht, die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen

$$\frac{a_{l+2}, a_{m+n} . b_1 \ldots . b_{l+1}}{a_m, a_{m+n} . a_1, a_l},$$

oder der Fehler, den man begeht, wenn man $F(a, a_l)$ statt $F(a, a_{m+n})$ nimmt, enthalten ist. Aus Formel ($D.$) folgt:

$$a_1, a_{m+1} = a_1, a_{l+1} . a_{l+2}, a_{m+n} + b_{l+2} . a_1, a_l . a_{l+3}, a_{m+n};$$

da nun $a_{l+2}, a_{m+n} > a_{l+3}, a_{m+n}$ ist, so ist

$$\frac{a_1, a_{m+n}}{a_{l+2}, a_{m+n}} < a_1, a_{l+1} + b_{l+2} . a_1, a_l \text{ und } > a_1, a_{l+1},$$

also

$$\frac{a_{l+2}, a_{m+n} . b_1 \ldots . b_{l+1}}{a_1, a_{m+n} . a_1, a_l} = \frac{b_1 \ldots . b_{l+1}}{\frac{a_1, a_{m+n}}{a_{l+2}, a_{m+n}} . a_1, a_l} > \frac{b_1 \ldots . b_{l+1}}{a_1, a_l (a_1, a_{l+1} + b_{l+2} . a_1, a_l)}$$

$$\text{und} < \frac{b_1 \ldots . b_{l+1}}{a_1, a_l . a_1, a_{l+1}}.$$

Eine andere Gränzenbestimmung giebt folgende Betrachtung. Man setze

$\frac{a_{l+1},\ a_{m+n}.\ b_1 \ldots b_{l+1}}{a_1,\ a_{m+n}.a_1,\ a_l} = \pm q$, also $F(a, a_{m+n}) - F(a, a_l) = \pm q$, so wird, da $F(a, a_l)$ weniger von $F(a, a_{m+n})$ verschieden ist als $F(a, a_{l-1})$,

$$F(a, a_{m+n}) - F(a, a_{l-1}) = \mp(q+t)$$

sein, wo t eine positive Gröſse bedeutet, also

$$F(a, a_l) - F(a, a_{l-1}) = \pm(2q+t).$$

Gilt das obere Zeichen, so ist daher

$$q < \frac{F(a, a_l) - F(a, a_{l-1})}{2} \text{ oder } q < \frac{b_1 \ldots b_l}{2.a_1,\ a_l.a_1,\ a_{l-1}},$$

gilt dagegen das untere, so hat man $2q + t = F(a, a_{l-1}) - F(a, a_l)$ oder $q < \frac{-b_1 \ldots b_l}{2.a_1,\ a_l.a_1,\ a_{l-1}}$ (nach Formel E.). $F(a, a_{l+1})$ nähert sich $F(a, a_{m+n})$ mehr als $F(a, a_l)$ und $F(a, a_{l-1})$, man kann also

$$F(a, a_{m+n}) - F(a, a_{l+1}) = \mp(q-d)$$

setzen, wo d positiv und $> t$ sein muſs, also ist

$$F(a, a_{l+1}) - F(a, a_l) = \pm(2q+d),$$

also

$$2q > \pm[F(a, a_{l+1}) - F(a, a_l)] \text{ oder } q > \pm\frac{b_1 \ldots b_{l+1}}{2.a_1,\ a_{l+1}.a_1,\ a_l}.$$

Es sei z. B. der Kettenbruch $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{925}{597}$ gegeben. Die Näherungsbrüche sind $\frac{1}{1}, \frac{5}{3}, \frac{23}{15}, \frac{135}{87}$. Es ist

$$\frac{925}{597} = 1{,}549413735344, \quad \frac{135}{87} = 1{,}551724137931,$$

also der Unterschied dieser beiden Brüche 0,00231040287. Man setze ihn $= 9$; hier ist $a_1, a_{l-1} = 15$; $a_1, a_l = 87$; $a_1, a_{l+1} = 597$; $a_{l+1} = 6$; also nach der ersten Gränzenbestimmung $q < \frac{2.3.4.5}{87.597}$ oder $< 0{,}0023104025876$ (also bis auf die zuletzt entwickelte Stelle dem wahren Werthe gleich),

$$q > \frac{120}{87(597+87)}, \text{ d. h. } \geq 0{,}0002\ldots.$$

Nach der zweiten Gränzenbestimmung ist

$$q < \frac{24}{2.15.87}, \text{ d. h. } < 0{,}009\ldots. \text{ und } q > \frac{120}{2.597.87}, \text{ d. h. } > 0{,}001.$$

12.

Es kann keinen Bruch $\frac{m}{n}$ geben, der näher oder eben so nahe zu $F(a, a_m)$ wäre als irgend ein Näherungsbruch $F(a, a_l)$, wenn $n < \frac{a_1,\ a_l}{b_1.b_2.b_{l+1}}$

ist. Ist $F(a, a_l)$ größer oder kleiner wie $F(a, a_m)$, so ist $F(a, a_{l+1})$ kleiner oder größer als derselbe Bruch, und ihm zugleich näher, $\frac{m}{n}$ muß also entweder zwischen $F(a, a_l)$ und $F(a, a_{l+1})$ fallen, und, der Voraussetzung gemäß, letzterem näher als ersterem sein, oder $\frac{m}{n}$ muß kleiner oder größer als $F(a, a_{l+1})$ sein, je nachdem $F(a, a_l)$ größer oder kleiner als $F(a, a_{l+1})$ ist. In jedem Falle wird der Unterschied zwischen $\frac{m}{n}$ und $F(a, a_{l+1})$ weniger betragen müssen, als der Unterschied zwischen $F(a, a_{l+1})$ und $F(a, a_l)$ (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen). Dies ist aber unmöglich. Denn es ist

$$F(a, a_{l+1}) - F(a, a_l) = \frac{b_1 \ldots . b_{l+1}}{a_1, a_l . a_1, a_{l+1}} = \frac{1}{\frac{a_1, a_l}{b_1 \ldots . b_{l+1}} . a_1, a_{l+1}},$$

$$\frac{m}{n} - F(a, a_{l+1}) = \frac{(m . a_1, a_{l+1} - n . a, a_{l+1})}{n . a_1, a_{l+1}}.$$

Nun ist $n < \frac{a_1 . a^l}{b_1 \ldots . b_{l+1}}$, $m . a_1, a_{l+1} - n . a, a_{l+1} \overline{\overline{>}} 1$ (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen), also nothwendig

$$\left[\frac{m}{n} - F(a, a_{l+1})\right] > F(a, a_{l+1}) - F(a, a_l).$$

Hieraus folgt zugleich, daß zwischen zwei Näherungsbrüche $F(a, a_l)$ und $F(a, a_{l+1})$ kein Bruch $\frac{m}{n}$ fallen kann, dessen Nenner $\overline{\overline{<}} \frac{a_1, a_{l+1}}{b_1 \ldots . b_{l+1}}$ wäre, weil sonst $\frac{a, a_l . n - a_1, a_l m}{a_1, a_l . n} < \frac{b_1 \ldots . b_{l+1}}{a_1, a_{l+1} . a_1, a_l}$ oder $< \frac{1}{a_1, a_l . \frac{a_1, a_{l+1}}{b_1 \ldots . b_{l+1}}}$ sein müßte, was unmöglich ist.

13.

Es wurde früher gezeigt, daß $a, a_m . a_1, a_{m-1} - a_1, a_m . a, a_{m-1} = \pm b_1 . b_2 \ldots . b$ ist. Man darf aber nicht umgekehrt behaupten, daß, wenn $m . a_1, a_{m-1} - n . a, a_{m-1} = \pm b \ldots . b_m$ ist, auch nothwendig $\frac{m}{n} = \frac{a\ , a_m}{a_1, a_m}$ sei. Denn man setze

$$m = (a_m \pm r) . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2};\ n = (a_m \pm r) a_1, a_{m-1} + b_m . a_1, a_{m-2},$$

wo r eine beliebige Zahl bedeuten mag; m und n sind also bezüglich nicht $= a, a_m$ und a_1, a_m; aber dennoch ist

$$m . a_1, a_{m-1} - n . a, a_{m-1} = b_m (a, a_{m-2} . a_1, a_{m-1} - a_1, a_{m-2} . a, a_{m-1}) = \pm b_1 \ldots b_m.$$

Der Bruch $\frac{m}{n} = \frac{(a_m - r) . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2}}{(a_m - r) . a_1, a_{m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}}$ wird immer zwischen den

Brüchen $F(a, a_{m-1})$, $F(a, a_m)$ enthalten, und daher selbst ein Näherungsbruch sein, wenn r eine positive Zahl und $< a_m$ ist. Es sei $F(a, a_{m-1})$ gröſser, also $F(a, a_{m-1})$ kleiner als $F(a, a_m)$, so ist

$$\frac{m}{n} - F(a, a_{m-2}) = \frac{(a_m - r)[a, a_{m-1}.a_1, a_{m-2} - a, a_{m-2}.a_1, a_{m-1}]}{n.a_1, a_{m-2}}.$$

Der Zähler dieses letzten Bruches ist eine negative Gröſse, da $F(a, a_{m-1}) < F(a, a_{m-2})$ ist, daher $\frac{m}{n} < F(a, a_{m-2})$. Ferner ist $\frac{m}{n} - F(a, a_m) =$

$$\frac{(a_m - r)[a, a_{m-1}.a_1, a_m - a_1.a_{m-1}.a, a_m] + b_m[a, a_{m-2}.a_1, a_m - a, a_{m-2}.a, a_m]}{n.a_1, a_m} =$$

$$\frac{r(a, a_m.a_1, a_{m-1} - a_1, a_m.a, a_{m-1})}{n.a_1, a_m} = \frac{r.b_1 \ldots . b_m}{n.a_1, a_m}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist positiv, da $F(a, a_m) > F(a, a_{m-1})$ ist, und daher $\frac{m}{n} > F(a, a_m)$. Wäre $F(a, a_{m-2})$ kleiner, also $F(a, a_{m-1})$, so würde man eben so beweisen, daſs $\frac{m}{n} > F(a, a_{m-2})$ und $< F(a, a_m)$ ist. Zwischen jede zwei Näherungsbrüche $F(a, a_m)$ und $F(a, a_{m-2})$, sind also $a - 1$ Brüche enthalten, die sich gleichfalls dem wahren Bruche nähern, und man erhält sie, indem in dem oben gegebenen Werthe von $\frac{m}{n}$ für r allmälig alle Zahlen von 1 bis $a_m - 1$ substituirt werden. Man nennt diese Brüche e i n g e s c h a l t e t e.

Zieht man zwei auf einander folgende eingeschaltete Brüche von einander ab, z. B.

$$\frac{(a_m - r)a, a_{m-1} + b_m.a, a_{m-2}}{(a_m - r)a_1, a_{m-1} + b_m.a_1, a_{m-2}} \text{ und } \frac{(a_m - r + 1)a, a_{m-1} + b_m.a, a_{m-2}}{(a_m - r + 1)a_1, a_{m-1} + b_m.a_1, a_{m-2}},$$

so ist der Zähler des Unterschieds, vorausgesetzt, daſs man den kleineren vom gröſseren abzieht, $= b_m(a, a_{m-1}.a_1, a_{m-2} - a, a_{m-2}.a_1, a_{m-1})$. Ist $F(a, a_{m-1}) < F(a, a_{m-2})$, so ist dieser Zähler $= -b_m \ldots . b_1$. Jeder folgende eingeschaltete Bruch wird also dann kleiner als der vorhergehende, und nähert sich daher $F(a, a_m)$ mehr; ist dagegen $F(a, a_{m-1}) > F(a, a_{m-2})$, so ist der Zähler $= b_m \ldots . b_1$, also jeder folgende eingeschaltete Bruch gröſser als der vorhergehende, und daher $F(a, a_m)$ näher. Hieraus folgt, daſs zwischen zwei solchen auf einander folgenden eingeschalteten Brüchen kein Bruch, dessen Nenner gleich oder kleiner als

$$\frac{(a_m - r + 1)a, a_{m-1} + b_m.a, a_{m-2}}{b_1 \ldots . b_m}$$

ist, liegen kann. Der Beweis ist wie in 12.

Eine andere Art von eingeschalteten Brüchen erhält man, wenn man $m = a_m . a, a_{m-1} + (b_m - r) . a, a_{m-2}$, $n = a_m . a_1, a_{m-1} + (b_m - r) a_1, a_{m-2}$ setzt, wo r eine positive Zahl $< b_m$ bedeutet. Es seien wieder $F(a, a_{m-2})$, $F(a, a_{m-1})$, $F(a, a_m)$ drei Näherungsbrüche, und $F(a, a_{m-2})$, $F(a, a_m)$ gröfser, $F(a, a_{m-1})$ kleiner als der ganze Bruch, oder $F(a, a_m)$ demselben gleich, so ist

$$\frac{m}{n} - \frac{a, a_m}{a_1, a_m}$$

$$= \frac{a_m(a, a_{m-1} . a_1, a_m - a_1, a_{m-1} . a, a_m) + (b_m - r)(a, a_{m-2} . a_1, a_m - a_1, a_{m-2} . a, a_m)}{n . a_1, a_m}$$

$$= \frac{-r(a, a_{m-2} . a_1, a_m - a_1, a_{m-2} . a, a_m)}{n . a_1, a_m}.$$

Nun ist $F(a, a_{m-2}) > F(a, a_m)$, also der Zähler des Bruches negativ, d. h. $\frac{m}{n} < F(a, a_m)$, ferner ist

$$\frac{m}{n} - \frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} = \frac{(b_m - r)[a, a_{m-2} . a_1, a_{m-1} - a, a_{m-1} . a_1, a_{m-2}]}{n . a_1, a_{m-1}}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist positiv, weil $F(a, a_{m-2})$ gröfser wie $F(a, a_{m-1})$ ist, daher $\frac{m}{n} > F(a, a_{m-1})$. Dieser Bruch $\frac{m}{n}$ nähert sich dem wahren Werthe immer mehr, als $F(a, a_{m-1})$, weil er zwischen $F(a, a_{m-1})$ und $F(a, a_m)$, (welches letztere dem wahren Werthe näher ist wie $F(a, a_{m-1})$), liegt, kann sich aber demselben bald mehr bald weniger wie a, a_m nähern. Wäre $F(a, a_m)$ kleiner, $F(a, a_{m-1})$ gröfser als der wahre Werth des Bruches, so würde aus den eben bewiesenen Formeln folgen, dafs $\frac{m}{n} > F(a, a_m)$ und $< F(a, a_{m-1})$ ist.

14.

Es seien $F(a, a_m) = a + b\frac{b_1}{a_1 + \frac{l_2}{a_2 \text{ etc.}}}$, $F(\alpha, \alpha_m) = \alpha + \frac{b_1}{\alpha_1 + \frac{b_2}{\alpha_2}}$ zwei Kettenbrüche von der in §. 11. beschriebenen Art, deren Theilzähler alle gleich, und deren Theilnenner den darüber stehenden Theilzählern entweder gleich, oder gröfser als dieselben sind, d. h. im Allgemeinen $a_l \geqq b_l$, $\alpha_l \geqq b_l$, so können diese Brüche nicht gleich sein, wenn nicht $a = \alpha$, $a_1 = \alpha_1$ und überhaupt $a_l = \alpha_l$ ist. Denn es sei $\frac{b_2}{a_2 + \text{etc.}} = M$, $\frac{b_2}{\alpha_2 + \text{etc.}} = N$, also M und N positive Gröfsen, so sind die Brüche $\frac{b_1}{a_1 + M}$, $\frac{b_1}{\alpha_1 + N}$ beide kleiner wie 1; sollen also $F(a, a_m)$, $F(\alpha, \alpha_m)$ gleich sein, so mufs auch $a = \alpha$ sein, folglich auch $a_1 + M = \alpha_1 + N$. Nun sind M und N beide

kleiner wie 1, also $a_1 = \alpha_1$, Führt man auf diese Weise fort, so findet man, daſs überhaupt $a_m = \alpha_m$ sein muſs. Man bemerke, daſs es bei diesem Beweise nicht darauf ankommt, ob die Anzahl der Theilnenner begränzt ist; der Satz gilt also auch für unendliche Kettenbrüche, sofern alle Theilzähler und Theilnenner positive ganze Zahlen und die Theilbrüche mit dem $+$ Zeichen verbunden sind.

15.

Besonders wichtig sind die in §. 11. bezeichneten Brüche, wenn alle Theilzähler $=1$ sind. Man nennt sie dann gewöhnliche oder gemeine Kettenbrüche. Es sollen hier ihre besonderen Eigenschaften, sofern sie aus dem Frühern folgen, zusammengestellt werden.

a) Es ist

$$a, a_m = a \,.\, a_1, a_m + a_2, a_m \quad \text{(nach Formel } A.\text{)},$$
$$a, a_m = a_m \,.\, a, a_{m-1} + a, a_{m-2} \quad \text{(nach Formel } C.\text{)}.$$

b) Die Brüche $F(a, a)$, $F(a, a_1)$ u. s. w. sind Näherungsbrüche des ganzen Kettenbruchs, und zwar ist ihm jeder in der Reihe folgende näher als ein vorhergender. Diese Näherungsbrüche sind abwechselnd gröſser oder kleiner wie der ganze Bruch. Die Gränzen, innerhalb welcher der Unterschied zwischen dem ganzen Bruche $F(a, a_m)$ und einem Näherungsbruche $F(a, a_l)$ eingeschlossen sind, werden hier,

$$q < \frac{1}{a_1, a_l \,.\, a_1, a_{l+1}}, \quad q > \frac{1}{a_1, a_l(a_1, a_l + a_1, a_{l+1})}, \text{ und}$$
$$q < \frac{1}{2 \,.\, a_1, a_l \,.\, a_1, a_{l-1}}, \quad q > \frac{1}{2 \,.\, a_1, a_l \,.\, a_1, a_{l+1}}, \text{ (nach §. 11.)}.$$

c) Jeder Näherungsbruch ist dem wahren Werthe näher als jeder andere Bruch mit kleinerem Nenner, und zwischen zwei Näherungsbrüchen kann kein Bruch mit gleichem oder kleinerem Nenner, als der gröſsere Nenner der beiden Brüche ist, fallen (nach §. 12.).

d) Zieht man den ersten von zwei auf einander folgenden Näherungsbrüchen vom zweiten ab, so ist der Zähler des Bruches der ihren Unterschied angiebt, $= \pm 1$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Anzahl der Theilzähler gerade oder ungerade ist. Jeder Näherungsbruch, so wie der ganze reducirte Bruch, ist daher auf seine kleinste Benennung gebracht (nach §. 8.).

e) Zwei gewöhnliche Kettenbrüche können nicht gleich sein, wenn sie nicht identisch sind (nach §. 14.).

$f)$ Wenn $a_m > 1$ ist, so lassen sich zwischen $F(a, a_{m-1})$ und $F(a, a_m)$, noch $a_m - 1$ Brüche einschalten, die dem wahren Werthe näher als $F(a, a_{m-1})$ und weniger nahe als $F(a, a_m)$ sind. Der Unterschied zweier auf einander folgender eingeschalteter Brüche hat immer ± 1 zum Zähler, wo das obere oder untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem die beiden Näherungsbrüche, zwischen welchen sie enthalten sind, beide weniger als der wahre Werth betragen, oder nicht, vorausgesetzt, dafs man den kleineren Näherungsbruch vom gröfseren abzieht *). Zwischen zwei eingeschalteten Brüchen kann kein dritter liegen, dessen Nenner kleiner wäre als der des gröfsten, oder ihm gleich (nach §. 13.).

Die zweite Art von eingeschalteten Brüchen fällt hier natürlich weg.

$g)$ Es seien $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_{\prime\prime}}{b_{\prime\prime}}$ drei aufeinander folgende Näherungsbrüche, so ist $ab_1 - a_1 b = \pm 1$ $a_1 b_{\prime\prime} - a_{\prime\prime} b_1 = \mp 1$, also $(a_{\prime\prime} - a) b_1 = (b_{\prime\prime} - b) a_1$, oder $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_{\prime\prime} - a}{b_{\prime\prime} - b}$, das heifst, wenn man drei auf einander folgende Näherungsbrüche hat, und den Zähler des ersten vom Zähler des dritten, eben so den Nenner des ersten vom Nenner des dritten abzieht, so wird die erste Differenz, durch die zweite dividirt, dem zweiten Näherungsbruche gleich sein; aber man wird dadurch nicht immer diesen Bruch in der kleinsten Benennung erhalten: denn ist a_m der letzte in $a_{\prime\prime}$ enthaltene Theilnenner, so ist

$$a_{\prime\prime} = a_m . a_1 + a, \quad b_{\prime\prime} = a_m . b_1 + b,$$

also

$$a_{\prime\prime} - a = a_m . a_1, \quad b_{\prime\prime} - b = a_m . b_1;$$

sind dagegen $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_{\prime\prime}}{b_{\prime\prime}}$ drei auf einander folgende eingeschaltete Brüche, so ist $ab_1 - a_1 b = \pm 1$, $a_1 b_{\prime\prime} - a_{\prime\prime} b_1 = \pm 1$, also $(a + a_{\prime\prime}) b_1 = (b + b_{\prime\prime}) a_1$, oder $\frac{a + a_{\prime\prime}}{b + b_{\prime\prime}} = \frac{a_1}{b_1}$, welches Resultat sich leicht in Worten ausdrücken läfst. Auch hier erhält man nicht immer den Bruch in der kleinsten Benennung.

16.

Mehrere der früher erwähnten Sätze können unverändert auch auf unendliche Kettenbrüche ausgedehnt werden. Denkt man sich nemlich einen solchen Kettenbruch in zwei Theile getheilt, wovon der erste die

*) Die eingeschalteten Brüche sind also immer auf ihre kleinste Benennung gebracht.

Glieder bis zu einem gewissen Theilnenner a_{m-1}, der andere die Glieder von dem folgenden Theilnenner an und weiter enthält, so kann man den zweiten Theil als summirt betrachten, und diese Summe $= a_m$ setzen. Man hat alsdann auch in diesem Falle

$$a_l, a_m = a_l . a_{l+1}, a_m + b_{l+1} . a_{l+2}, a_m \quad (\S.\ 3.),$$
$$a_l, a_m = a_m . a_l, a_{m-1} + b_m . a_l, a_{m-2} \quad (\S.\ 6.),$$

und wenn man den summirten Theil a_{m+n} nennt:

$$a, a_{m+n} = a_m, a_{m+n} . a, a_{m-1} + b_m . a_{m+1}, a_{m+n} . a, a_{m-2} \quad (\S.\ 7.).$$

B. Verwandlung gegebener Kettenbrüche in andere, sowohl der endlichen als der unendlichen.

17.

Es wurde schon früher (§. 2.) an einem Beispiele gezeigt, daſs mehrere Kettenbrüche, die nicht identisch sind, einander gleich sein können. Es sollen nun hier die erheblichsten Methoden gegeben werden, vermittelst welcher man einen gegebenen Kettenbruch, seines Werthes unbeschadet, in einen andern verwandeln kann. Der Nutzen solcher Verwandlungen wird sich beim späteren Gebrauche von selbst ergeben. Der Raum-Ersparung wegen soll aber von jetzt an in den meisten Fällen eine andere Bezeichnung für die Kettenbrüche angewandt werden; nemlich statt der früheren Bezeichnungsart:

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \text{etc.}$$

schreibe ich jetzt: $F(a, a_m) = F(a + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 \text{ etc.})$, wo also immer zwischen einem Theilzähler und dem dazu gehörenden Theilnenner zwei Puncte stehen. Sollte ein Theilzähler oder Theilnenner schon ein Bruch sein, so wird er auch in Form eines Bruches geschrieben. Wäre z. B. der Bruch $a + \cfrac{\frac{b_1}{\beta_1}}{a_1 + \cfrac{b_2}{\frac{a_2}{\alpha_2} \text{ etc.}}}$ gegeben, so würde dieser Bruch nach der neuen Bezeichnung, wie folgt, ausgedrückt werden müssen: $F\left(a + \frac{b_1}{\beta_1} : a_1 + b_2 : \frac{a_2}{\alpha_2} \text{etc.}\right)$. Sollte ein Theilzähler oder Theilnenner aus mehreren, durch $\pm$ verbundenen Gliedern bestehen, so werde ich ihn, wenn Zweideutigkeit entstehen könnte, in Klammern einschlieſsen.

18.

In jedem Kettenbruche $F(a, a_{m+n})$ kann man, seines Werthes unbeschadet, einen Theilzähler, den darauf folgenden Theilnenner und den auf diesen folgenden Theilzähler mit einem und demselben beliebigen Ausdrucke multipliciren oder dividiren. Für endliche Kettenbrüche ist der Satz schon früher bewiesen worden (§. 10.); es ist aber leicht einzusehen, dafs er auch für unendliche gilt, wenn man den Werth des unendlichen Kettenbruchs $F(a_{m+1}, a_{m+n}) = \frac{s}{t}$ setzt, weil am angeführten Orte über die Werthe von s und t gar nichts Näheres bestimmt worden ist. Hierdurch erhält man ein Mittel, Kettenbrüche, deren Theilzähler oder Theilnenner Brüche sind, in andere zu verwandeln, deren Theilzähler oder Theilnenner keine Brüche enthalten. Es sei z. B. der Kettenbruch $A = F\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b_1}{\beta_1} : \frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{b_2}{\beta_2} : \frac{a_2}{\alpha_2} \text{etc.}\right)$, so ist

$$A = F\left(\frac{a}{\alpha} + b_1 : \frac{a_1 . \beta_1}{\alpha_1} + \frac{b_2 . \beta_1}{\beta_2} : \frac{a_2}{\alpha_2} \text{etc.}\right)$$
$$= F\left(\frac{a}{\alpha} + b_1 . \alpha_1 : a_1 . \beta_1 + \frac{b_2 . \alpha_1 . \beta_1}{\beta_2} : \frac{a_2}{\alpha_2} \text{etc.}\right)$$
$$= F\left(\frac{a}{\alpha} + b_1 . \alpha_1 : a_1 . \beta_1 + b_2 . \alpha_1 . \beta_1 : \frac{a_2 . \beta_2}{\alpha_2} \text{etc.}\right).$$

Man sieht, dafs auf diese Weise alle gebrochenen Theilzähler und Theilnenner weggeschafft werden können, den ersten Theilnenner $\frac{a}{\alpha}$ jedoch ausgenommen.

19.

Da der Werth eines Kettenbruchs derselbe bleibt, wenn man zwei auf einander folgende Theilzähler b_m, b_{m+1} und den dazwischen liegenden Theilnenner a_m mit -1 multiplicirt, so kann man jeden Kettenbruch mit negativen Theilnennern in einen andern verwandeln, der nur positive Theilnenner enthält, den ersten Theilnenner ausgenommen, der sein Vorzeichen behält. Es sei z. B. der Kettenbruch

$$A = F(\pm a + b_1 : -a_1 + b_2 : -a_2 + b_3 : -a_3 \text{ etc.}),$$

so ist

$$A = F(\pm a - b_1 : a_1 - b_2 : -a_2 + b_3 : -a_3 \text{ etc.})$$
$$= F(\pm a - b_1 : a_1 + b_2 : a_2 - b_3 : -a_3 \text{ etc.})$$
$$= F(\pm a - b_1 : a_1 + b_2 : a_2 + b_3 : a_3 \text{ etc.}).$$

Sind aber die Theilnenner eines Kettenbruches alle positiv, so ist es leicht,

die etwa darin enthaltenen negativen Theilzähler wegzuschaffen, und so den Bruch in einen anderen zu verwandeln, der nur positive Theilzähler und Theilnenner enthält. Denn es ist allgemein

$$a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m + R} = a_{m-1} - 1 + \frac{1}{1} + \frac{b_m}{a_m - b_m + R},$$

wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man beide Brüche in gewöhnliche verwandelt. Will man also den Kettenbruch

$$A = F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 - b_3 : a_3 \text{ etc.})$$

in einen anderen verwandeln, der nur positive Theilzähler hat, so setze man $R = F(-b_2 : a_2 - b_3 : a_3 \text{ etc.})$, also $A = F([a-1] + 1 : 1 + b_1 : a_1 - b_1 + R)$; nun setze man $R' = F(-b_3 : a_3 \text{ etc.})$, also $R = F(-1 + 1 : 1 + b_2 : a_2 - b_2 + R_1)$ und $A = F([a-1] + 1 : 1 + b_1 : (a_1 - b_1 - 1) + 1 : 1 + b_2 : a_2 - b_2 + R_1)$, und eben so findet man $A =$

$F([a-1] + 1:1 + b_1 : (a_1 - b_1 - 1) + 1:1 + b_2 : (a_2 - b_2 - 1) + 1:1 + b_3 : a_3 - b_3 \text{ etc.})$.

Dieser Bruch wird daher nur positive Theilzähler und Theilnenner enthalten, wenn nicht etwa irgend ein Theilnenner a_m kleiner ist als b_{m+1}.

20.

Ein Kettenbruch, der gebrochene oder negative Theilzähler oder Theilnenner enthält, kann also zuerst nach (§. 18.) in einen andern verwandelt werden, der nur ganze Theilzähler und Theilnenner enthält, dieser wieder nach (§. 19.) in einen andern, der nur positive Theilzähler und Theilnenner hat (den erwähnten Ausnahmefall bei Seite gesetzt); nur der erste Theilnenner könnte gebrochen oder negativ sein, diesen brauchte man alsdann nur auf die andere Seite zu bringen, um auf der einen Seite einen Kettenbruch mit blos ganzen positiven Theilzählern und Theilnennern zu haben. Hierdurch ist eine frühere Behauptung gerechtfertigt (vergl. §. 11.).

21.

Will man einen Kettenbruch mit einer Zahl x multipliciren, so braucht man nur den ersten Theilzähler und Theilnenner mit x zu multipliciren. Ist z. B. der Kettenbruch $A = a + \frac{b_1}{R}$ gegeben, wo R wieder die Summe eines Kettenbruchs ausdrückt, so hat man $x.A = x.a + x.\frac{b_1}{R}$; ist der erste Theilnenner $= 0$, so braucht man nur den ersten Theilzähler mit x zu multipliciren. Will man einen Kettenbruch mit x dividiren, so dividire man den ersten Theilnenner, und multiplicire den zweiten Theil-

zähler und zweiten Theilnenner mit x. Ist z. B. der Kettenbruch $A = a + \frac{b_1}{R}$, so ist $\frac{A}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b_1}{x.R}$. Sei nun $R = a_1 + \frac{b_2}{R_1}$, so ist

$$\frac{A}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b_1}{x.a_1 + \frac{x.b_2}{R}}.$$

22.

Ist in einem Kettenbruche $F(a, a_{m+n})$ ein Theilzähler $b_m = 0$, so bricht der Bruch bei b_m ab, wenn $F(a_m, a_{m+n})$ nicht $= 0$ ist. Hat man z. B. $F(a, a_{m+n}) = F(a + b_1 : a_1 + 0 : a_2 \text{ etc.})$, und ist $F(a_2, a_{m+n})$ nicht $= 0$, so ist $F(a, a_{m+n}) = a + \frac{b_1}{a_1}$. Man darf aber nicht unbedingt behaupten *), daſs, wenn ein Theilzähler $b_m = 0$ ist, alle folgenden Glieder, des Werthes des Bruches unbeschadet, weggelassen werden können, weil es möglich ist, daſs auch $F(a_m, a_{m+n}) = 0$ ist, und alsdann $\frac{b_m}{F(a_m, a_{m+n})} = \frac{0}{0}$ einen bestimmten Werth haben kann. Daſs solche Fälle wirklich vorkommen, wird sich später zeigen.

23.

Ist ein Theilnenner $= 0$, so läſst sich der Kettenbruch zusammenziehen. Hat man z. B. $F(a, a_m) = a + \frac{b}{0 + \frac{b_2}{F(a_2, a_m)}}$, so ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{b_2 : F(a_2, a_m)} = a + \frac{b_1 . F(a_2, a_m)}{b_2},$$

aber $F(a_2, a_m) = a_2 + \frac{b_2}{F(a_3, a_m)}$, also $F(a, a_m) = a + \frac{b_1 . a_2}{b_2} + \frac{b_1 . b_2}{b_2 . F(a_3, a_m)}$, und da $F(a_3, a_m) = a_3 + \frac{b_3}{F(a_4, a_m)}$, so ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1 . a_2}{b_2} + \frac{b_1 . b_2}{b_2 . a_3 + \frac{b_2 . b_3}{F(a_4, a_m)}}.$$

24.

Aus §. 7. ergiebt sich eine Methode, jeden Kettenbruch in einen andern zu verwandeln, der weniger Theilbrüche als der erste enthält. Es wurde nemlich dort gezeigt, daſs

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{F(a_m, a_{m+n}) . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2}}{F(a_m, a_{m+n}) . a_1, a_{m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}}$$

ist, oder

*) Diese Behauptung findet man z. B. in Eytelwein's Analysis Bd. 1. §. 273.

$$F(a, a_{m+n}).F(a_m, a_{m+n}).a_1, a_{m-1} + F(a, a_{m+n}).b_m.a_1, a_{m-n}$$
$$-F(a_m, a_{m+n})a, a_{m-1} - b_m.a, a_{m-2} = 0,$$

und wenn man alle Glieder mit a_1, a_{m-1} dividirt:

$$F(a, a_{m+n}).F(a_m, a_{m+n}) + F(a, a_{m+n}).b_m.\frac{a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}}$$
$$-F(a_m, a_{m+n}).F(a, a_{m-1}) - b_m.\frac{a, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} = 0.$$

Hieraus folgt

$$[F(a, a_{m+n}) - F(a, a_{m-1})] \times \left[F(a_m, a_{m+n}) + b_m.\frac{a_1.a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}}\right] =$$
$$b_m.\frac{a, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} - b_m.F(a, a_{m-1}).\frac{a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} = b_m.\frac{(a, a_{m-2}.a_1, a_{m-1} - a, a_{m-1}.a_1, a_{m-2})}{(a_1, a_{m-1})^2}.$$

Nun ist $a, a_{m-2}.a_1, a_{m-1} - a, a_{m-1}.a_1, a_{m-2} = \pm b_1.b_2 \ldots . b_{m-1}$ (§. 8.), also

$$1. \quad F(a, a_{m+n}) = F(a, a_{m-1}) \pm \frac{b_1 \ldots . b_m}{(a_1, a_{m-1})^2 \left(b_m.\frac{a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} + F(a_m, a_{m+n})\right)},$$

folglich ist auch

$$2. \quad F(a_m, a_{m+n}) = F(a_m, a_{2m-1}) \pm \frac{b_{m+1} \ldots . b_{2m}}{(a_{m+1}, a_{2m-1})^2 \left(b_{2m}.\frac{a_{m+1}, a_{2m-2}}{a_{m+1}, a_{2m-1}} + F(a_{2m}, a_{m+n})\right)},$$

also

$$F(a, a_{m+n}) =$$
$$F(a, a_{m-1}) \pm \frac{b_1 \ldots . b_m}{(a_1, a_{m-1})^2 \left(b_m.\frac{a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} + F(a_m, a_{2m-1})\right)} \pm \frac{b_{m+1} \ldots . b_{2m}}{(a_{m+1}, a_{2m-1})^2 \left(b_{2m}.\frac{a_{m+1}, a_{2m-2}}{a_{m+1}, a_{2m-1}} + F(a_{2m}, a_{m+n})\right)}.$$

$F(a_{2m}, a_{m+n})$ könnte man wieder auf ähnliche Weise wie (1.) und (2.) verwandeln, und man sieht leicht, wie sich der auf diese Weise erhaltene Kettenbruch weiter fortsetzen läſst. Der ganze Ausdruck läſst sich aber noch sehr vereinfachen. Zuvörderst bemerke man, daſs überhaupt, wenn s irgend eine ganze Zahl bedeutet,

$$3. \quad F(a_{sm}, a_{m+n}) = F(a_{sm}, a_{(s+1)m-1}) \pm \frac{b_{sm+1} \ldots . b_{(s+1)m}}{(a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1})^2 \left(b_{(s+1)m}.\frac{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-2}}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} + F(a_{(s+1)m}, a_{m+n})\right)},$$

vorausgesetzt, daſs $m+n > (s+1)m$ ist. Ferner setze man

$$4. \quad Z_s = \frac{b_{sm+1} \ldots . b_{(s+1)m}}{(a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1})^2 \left(b_{(s+1)m}.\frac{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-2}}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} + F(a_{(s+1)m}, a_{m+n})\right)}$$

$$5. \quad = \frac{1}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} \left(\frac{b_{sm+1} \ldots . b_{(s+1)m}}{b_{(s+1)m}.a_{sm+1}, a_{(s+1)m-2} + a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}.F(a_{(s+1)m}, a_{m+n})}\right.,$$

Aus (3.) und (4.) folgt

$$6. \quad F(a_{sm}, a_{m+n}) = F(a_{sm}, a_{(s+1)m-1}) \pm Z_s,$$

und daher

$$F(a_{(s+1)m}, a_{m+n}) = F(a_{(s+1)m}, a_{(s+2)m-1}) \pm Z_{s+1} = \frac{a_{(s+1)m}, a_{(s+1)m-1}}{a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1}} \pm Z_{s+1}.$$

Substituirt man diesen Werth in (5.), so hat man, nach gehöriger Reduction:

$$Z_s = \frac{1}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} \times$$

$$\left(\frac{b_{sm+1} \cdots b_{(s+1)m} \cdot a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1}}{b_{(s+1)m} \cdot a_{sm+1}, a_{(s+1)m-2} \cdot a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1} + a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1} \cdot [a_{(s+1)m}, a_{(s+2)m-1} \pm a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1} \cdot Z_{s+1}]}\right)$$

oder (nach §. 7. Form. *D.*):

$$7. \quad Z_s = \frac{1}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} \left(\frac{b_{sm+1} \cdots b_{(s+1)m} \cdot a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1}}{a_{sm+1}, a_{(s+2)m-1} \pm a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1} \cdot a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1} \cdot Z_{s+1}}\right).$$

Aus (6.) folgt

$$F(a, a_{m+n}) = F(a, a_{m-1}) + Z_0 = \frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} + Z_0,$$

also, nach (7.):

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}} \left(a, a_{m-1} \pm \frac{b_1 \cdots b_m \cdot a_{m+1}, a_{2m-1}}{a_1, a_{2m-1} \pm a_1, a_{m-1} \cdot a_{m+1}, a_{2m-1} \cdot Z_1}\right).$$

Für Z_1 kann man nun wieder seinen Werth aus (7.) substituiren, und man sieht, wie auf diese Weise der ganze Kettenbruch fortgesetzt werden kann. Man erhält alsdann:

$$8. \quad F(a, a_{m+n}) =$$

$$\frac{1}{a_1, a_{m-1}} \left(a, a_{m-1} \pm \cfrac{b_1 \cdots b_m \cdot a_{m+1}, a_{2m-1}}{a_1, a_{2m-1} \pm \cfrac{b_{m+1} \cdots b_{2m} \cdot a_1, a_{m-1} \cdot a_{2m+1}, a_{3m-1}}{a_{m+1}, a_{3m-1} \pm \cfrac{b_{2m+1} \cdots b_{3m} \cdot a_{m+1}, a_{2m-1} \cdot a_{3m+1}, a_{4m-1}}{a_{2m+1}, a_{4m-1} \pm \cfrac{b_{3m+1} \cdots b_{4m} \cdot a_{2m+1}, a_{3m-1} \cdot a_{4m+1}, a_{5m-1}}{a_{3m+1}, a_{5m-1} \text{ etc.}}}}}\right).$$

Wäre der erste Theilnenner $a = 0$, so wäre $a, c_{m-1} = b_1 \cdot a_2, a_{m-1}$ und

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}} (b_1 \cdot a_2, a_{m-1} \pm a_1, a_{m-1} \cdot Z_0),$$

woraus sich dann wieder der ganze gesuchte Kettenbruch entwickeln läſst.

Betrachtet man die Formel (8.) mit Aufmerksamkeit, so sieht man, daſs sie so viel Theilbrüche enthält als man Gruppen a_1, a_{m-1}; a_{m+1}, a_{2m-1} u. s. w. hat. Im ursprünglichen Bruche $F(a, a_{m+n})$ sind aber von a_1, bis a_{m+1}, letzteres nicht mit eingeschlossen, m Theilbrüche, eben so viel von a_{m+1} bis a_{2m} u. s. w. Der Kettenbruch (8.) enthält daher m mal weniger Glieder als der ursprüngliche, wenn man den ersten Theilnenner a nicht mitzählt. Übrigens folgt aus §. 8., daſs man in den vorhergehenden Formeln die positiven oder negativen Zeichen nehmen muſs, je nachdem die Anzahl der in a, a_{m-1} enthaltenen Theilzähler gerade oder ungerade, d. h. je nachdem m ungerade oder gerade ist.

Die Formel (8.) ist besonders dann bequem, wenn der Kettenbruch $F(a, a_{m+n})$ so beschaffen ist, dafs nach einer Anzahl von m Theilbrüchen dieselben Theilzähler und Theilnenner in derselben Ordnung wiederkehren, so dafs

$$a_1,\ a_{m-1} = a_{m+1},\ a_{2m-1} = a_{2m+1},\ a_{3m-1} \text{ etc.},$$
$$a_1,\ a_{2m-1} = a_{m+1},\ a_{3m-1} = a_{m+1},\ a_{4m-1} \text{ etc.},$$
$$b_1 \ldots . b_m = b_{m+1} \ldots . b_{2m} = b_{2m+1} \ldots . b_{3m} \text{ etc. ist.}$$

Alsdann ist

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}}\left(a, a_{m-1} \pm \cfrac{b_1 \ldots . b_m . a_1, a_{m-1}}{a_1, a_{2m-1} \pm \cfrac{b_1 \ldots . b_m (a_1, a_{m-1})^2}{a_1, a_{2m-1} \pm \cfrac{b_1 \ldots . b_m (a_1, a_{m-1})^2}{a_1, a_{2m-1} \text{ etc.}}}}\right).$$

Man bemerke ferner, dafs $a_1, a_{2m-1} = a_1, a_{m-1} . a_m, a_{2m-1} + b_m . a_1, a_{m-2} . a_{m+1}, a_{2m-1}$ ist (§. 7. *D.*), aber nach der Voraussetzung $a_1, a_{m-1} = a_{m+1}, a_{2m-1}$, also $a_1, a_{2m-1} = a_1, a_{m-1} (a_m, a_{2m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}) = a_1, a_{m-1} . r$, wenn man $r = a_m, a_{2m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}$ setzt. Hieraus folgt $F(a, a_{m+n}) =$

$$\frac{1}{a_1, a_{m-1}} F(a, a_{m-1} \pm b_1 \ldots . b_m . a_1, a_{m-1} : r . a_1, a_{m-1} + b_1 \ldots . b_m (a_1, a_{m-1})^2 : r . a_1, a_{m-1}$$
$$+ b_1 \ldots . b_m (a_1, a_{m-1})^2 : r . a_1, a_{m-1} \text{ etc.})$$

oder (nach §. 18.)

9. $F(a, a_{m+n}) = \dfrac{1}{a_1, a_{m-1}} F(a, a_{m-1} \pm b_1 \ldots . b_m : r \pm b_1 \ldots . b_m : r \pm b_1 \ldots . b_m : r \text{ etc.})$.

Es sei z. B. der unendliche Kettenbruch $F(2:3 + 2:3 + 2:3 \text{ etc.})$ gegeben, und man habe $m = 3$ gesetzt. Weil hier der erste Theilnenner $= 0$ ist, so ist $a, a_{m-1} = b_1 . a_2, a_{m-1}$, und a_1, a_{m-1} der Nenner, $b_1 . a_2, a_{m-1}$ der Zähler des Bruches $\cfrac{2}{3 + \cfrac{2}{3}}$, also $a_1, a_{m-1} = 11$, $b_1 . a_{m-1} = 6$, ferner ist $a_1, a_{m-2} = a_1, a_1 = a_1 = 3$, a_m, a_{2m-1} der Zähler des Bruches $3 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{2}{3}}$, also $= 39$, und $r = 45$, auch $b_1 \ldots . b_m = b_1 . b_2 . b_3 = 8$, folglich $F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{11} F(6 + 8:45 + 8:45 + 8:45 \text{ etc.})$. Würde man für m eine andere Zahl annehmen, so würde man natürlich einen andern Ausdruck erhalten. Man kann aber auch für den Werth $m = 3$ noch andere Ausdrücke erhalten. Man verwandle z. B. zuerst den Kettenbruch $F(3 + 2:3 + 2:3 \text{ etc.})$ nach Formel (8.), so erhält man $\frac{1}{11} F(39 + 8:45 + 8:45 \text{ etc.})$, also

$$F(2:3 + 2:3 + 2:3 \text{ etc.}) = 2 : \tfrac{1}{11} F(39 + 8:45 + 8:45 \text{ etc.}) =$$
$$F(22:39 + 8:45 + 8:45 \text{ etc.}),$$

und es liefsen sich auf ähnliche Weise noch ähnliche Verwandlungen des

Kettenbruchs $F(2:3+2:3+2:3$ etc.) bewerstelligen, der, wie später erhellen wird, eine Wurzel der Gleichung $x^2+3x-2=0$ ist.

Noch ist der Fall merkwürdig, wenn die Theilzähler und Theilnenner in derselben Ordnung wiederkehren, jedoch mit Ausnahme von $a, a_m, a_{2m} \ldots\ldots a_{sm}$ und $b_m, b_{2m} \ldots\ldots b_{sm}$, die unter einander ungleich sein sollen. Ist also $l<m$, so hat man auch in diesem Falle allgemein $a_l, a_{m-1} = a_{l+m}$, $a_{2m-1} = a_{l+2m}$, a_{3m-1} etc. Ferner ist (§. 7. Form. D.)

$$a_{rm+1} \cdot a_{(r+2)m-1} =$$

$$a_{rm+1}, a_{(r+1)m-1} \cdot a_{(r+1)m}, a_{(r+2)m-1} + b_{(r+1)m} \cdot a_{rm+1}, a_{(r+1)m-2} \cdot a_{(r+1)m+1}, a_{(r+2)m-1},$$

und, da nach der Voraussetzung

$$a, a_{m-1} = a_{rm+1}, a_{(r+1)m-1} = a_{(r+1)m+1}, a_{(r+2)m-1} \text{ ist, } a_{rm+1}, a_{(r+2)m-1} =$$
$$a_{rm-1}, a_{(r+1)m-1}(a_{(r+1)m}, a_{(r+2)m-1} + b_{(r+1)m} \cdot a_{rm+1}, a_{(r+1)m-2}) = a_1, a_{m-1} \cdot Q_r,$$

wenn man den in den Klammern eingeschlossenen Ausdruck $=Q_r$ setzt; folglich geht der Ausdruck (7.) in folgenden über:

$$10. \quad F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}}\left(a, a_{m-1} \pm \frac{b_1 \ldots\ldots b_m}{Q_0} \pm \frac{b_{m+1} \ldots\ldots b_{2m}}{Q_1 \pm \text{etc.}}\right).$$

Es ist auch

$$a_{(r+1)m}, a_{(r+2)m-1} = a_{(r+1)m} \cdot a_{(r+1)m+1}, a_{(r+2)m-1} + b_{(r+1)m+1} \cdot a_{(r+1)m+2}, a_{(r+2)m-1}$$
$$= a_{(r+1)m} \cdot a_1, a_{m-1} + b_{(r+1)m+1} \cdot a_2, a_{m-1}, \text{ also}$$
$$Q_r = a_{(r+1)m} \cdot a_1, a_{m-1} + b_{(r+1)m+1} \cdot a_2, a_{m-1} + b_{(r+1)m} \cdot a_1, a_{m-2}.$$

Setzt man $b_{(r+1)m} = b_{(r+1)m+1}$, so bleibt der Werth von Q_r derselbe, wenn man die wiederkehrenden Theilzähler und Theilnenner in umgekehrter Ordnung nimmt *), da $a_1, a_{m-1} = a_{m-1}, a_1$; statt a_2, a_{m-1} hätte man $a_{m-2}, a_1 = a_1, a_{m-2}$ und statt a_1, a_{m-2} hätte man $a_{m-1}, a_2 = a_2, a_{m-1}$ (§. 4. Form. C.).

Setzt man also $F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}}(a, a_{m-1} \pm S)$, so wird der unendliche Kettenbruch, in welchem die wiederkehrenden Theilzähler und Theilnenner in umgekehrter Ordnung vorkommen,

$$= \frac{1}{a_{m-1}, a_1}(a \cdot a_{m-1}, a_1 + b_1 \cdot a_{m-2}, a_1 \pm S),$$

also der Unterschied der zwei unendlichen Kettenbrüche

$$= \frac{b_1}{a_1, a_{m-1}}(a \cdot a_1, a_{m-1} + b_1 \cdot a_2, a_{m-1} - a \cdot a_{m-1}, a_1 + b_1 \cdot a_{m-2}, a_1)$$
$$= \frac{b_1}{a_1, a_{m-1}}(a_2, a_{m-1} - a_1, a_{m-2}) = \frac{b_1}{F(a_1, a_{m-1})} - \frac{b_1}{F(a_{m-1}, a_1)}.$$

---

*) D. h. daſs man statt $F(a+b_1:a_1+b_2:a_2+\ldots\ldots+b_{m-1}:a_{m-1}+b_m:a_m$ etc.) alsdann $F(a+b_1:a_{m-1}+b_{m-1}:a_{m-2}+\ldots\ldots+b_2:a_1:b_m:a_m$ etc.) hat.

Der Unterschied der beiden unendlichen Kettenbrüche
$F(a + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 + \ldots b_{m-1} : a_{m-1} + b_m : a_m + b_1 : a_1 + \ldots b_{m-1} : a_{m-1}$ etc.)
und $F(a + b_1 : a_{m-1} + b_{m-1} : a_{m-2} + \ldots + b_2 : a_1 + b_m : a_m + b_1 : a_{m-1} + \ldots + b_2 : a_1$ etc.)
ist also dem Unterschiede der zwei endlichen Kettenbrüche
$F(a + b_1 : a_1 + \ldots + b_{m-1} : a_{m-1})$ und $F(a + b_1 : a_{m-1} + b_{m-1} : a_{m-2} + \ldots + b_2 : a_1)$
gleich, und von den veränderlichen Theilnennern unabhängig *).

25.

Bei allen im Vorigen gezeigten Verwandlungen der Kettenbrüche in andere, wurde der Kunstgriff angewandt, dafs man einen Theil des Kettenbruchs als summirt betrachtete, diese Summe durch einen Buchstaben ausdrückte, und durch die Verbindung dieses Buchstabens mit den übrigen Gliedern des Kettenbruchs neue Ausdrücke fand. Auf ähnliche Weise lassen sich Kettenbrüche vielfältig in andere verwandeln; hier sollen nur noch folgende Verwandlungen erwähnt werden. Es sei der Kettenbruch $F(a, a_m)$ gegeben; man setze $F(a_2, a_m) = R$, so ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1 . b_2}{a_1 . b_2 + a_1^2 . R},$$

wie man durch Reduction leicht findet. Nun sei $F(a_5, a_m) = R_1$, $F(a_8, a_m) = R_2$ etc., so ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1 . b_2}{a_1 . b_2 + a_1^2 a_2 + \frac{a_1^2 . b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4 + \frac{b_5}{R_1}}};$$

$$\text{aber } \frac{b_4}{a_4 + \frac{b_5}{R_1}} = \frac{b_4}{a_4} - \frac{b_4 . b_5}{a_4 . b_5 + a_4^2 . R_1},$$

$$\text{also } F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1 . b_2}{a_1 . b_2 + a_1^2 . a_2 + \frac{a_1^2 . b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} - \frac{b_4 . b_5}{a_4 . b_5 + a_4^2 . R_1}}.$$

Eben so könnte man wieder R_1 durch Hülfe des Ausdrucks R_2 verwandeln. Befreit man alsdann den erhaltenen Kettenbruch von gebrochenen Theilnennern (nach §. 18.), so hat man

$$F(a, a_m) =$$
$$F(a + \frac{b_1}{a_1} - b_1^1 . b_2 : (a_1 . b_2 + a_1^2 . a_2) + a_1^2 . a_4 . b_3 : (a_3 . a_4 + b_4) - b_4 . b_5 : (b_5 + \text{etc.}).$$

Aus §. 18. folgt, dafs man jeden Kettenbruch in einen anderen verwandeln kann, dessen Theilzähler alle $= 1$ sind. Denn hat man den Ket-

---

*) Man vergl. Euler in den *Comm. acad. Petrop. T. IX.* p. 123 ff., und Moebius in Crelle's Journ. für d. Math. Bd. VI. p. 226 ff.

tenbruch $F(a, a_m) = F(a + b_1 : a_1 + b_2 : F(a_2 . a_m))$, so ist dieser $=$

$$F\left(a + 1 : \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1} : F(a_2, a_m)\right) = F\left(a + 1 : \frac{a_1}{b_1} + 1 : \frac{a_2 . b_1}{b_2} + \frac{b_1 . b_3}{b_2} : F(a_3, a_m)\right),$$

da $F(a_2, a_m) = F(a_3 + b_3 : F(a_3, a_m)$ ist. Es ergiebt sich hieraus von selbst, auf welche Weise diese Verwandelung fortgesetzt werden kann.

Aus §. 19. folgt

$$a_{m-1} + \frac{1}{1} + \frac{b_m}{a_m + R_1} = a_{m-1} + 1 - \frac{b_m}{a_m + b_m + R_1}.$$

Man kann also nach dieser Formel den Theilbruch $\frac{1}{1}$ aus jedem Kettenbruche wegschaffen. Durch Wiederholung desselben Verfahrens kann man auch mehrere solcher Theilbrüche, die aufeinander folgen, wegschaffen, jedoch läfst sich die Reduction alsdann bequemer nach §. 24. ausführen.

Man bemerke noch folgenden Ausdruck:

$$\frac{a}{c-b} = -a + \frac{a}{1} + \frac{1}{b - c - 1},$$

von dessen Richtigkeit man sich durch Reduction überzeugen kann.

26.

Aus $F(a, a_m)$ kann leicht der Werth von $\frac{1}{F(a, a_m)}$ gefunden werden, denn es ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{F(a_1, a_m)}, \text{ also } \frac{1}{F(a, a_m)} = \frac{1}{a} + \frac{b_1}{F(a_1, a_m)};$$

ist $a = 0$, so ist

$$\frac{1}{F(a, a_m)} = \frac{F(a_1, a_m)}{b_1},$$

oder, weil $F(a_1, a_m) = a_1 + \frac{b_2}{F(a_2, a_m)}$,

$$\frac{1}{F(a, a_m)} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1 . F(a_2, a_m)} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{b_1 . a_2} + \frac{b_1 . b_3}{F(a_3, a_m)}.$$

27.

Die zwei unendlichen Kettenbrüche

$F(a : a + a : a_1 + a_1 : a_2 + a_2 : a_3 \text{ etc.})$ und $F(a_1 : a_1 + a_2 : a_2 + a_3 : a_3 \text{ etc.})$,

die bezüglich A, B heifsen sollen, sind für jeden Werth von a, a_1, a_2 etc. einander gleich. Denn nach §. 18. ist

$$A = F\left(a . \frac{a_1}{a} : a . \frac{a_1}{a} + a . \frac{a_1}{a} : a_1 + a_1 : a_2 + a_2 : a_3 \text{ etc.}\right) = F(a_1 : a_1 + a_1 : a_1 + a_2 : a_2 + a_3 : a_3 \text{ etc.})$$

$$= F\left(a_1 : a_1 + a_1 . \frac{a_2}{a_1} : a_1 . \frac{a_2}{a_1} + a_1 . \frac{a_2}{a_1} : a_2 + a_2 : a_3 \text{ etc.}\right) = F(a_1 : a_1 + a_2 : a_2 + a_2 : a_2 + a_3 : a_3 \text{ etc.})$$

$$= F\left(a_1 : a_1 + a_2 : a_2 + a_2 . \frac{a_3}{a_2} : a_2 . \frac{a_3}{a_2} + a_2 . \frac{a_3}{a_2} : a_3 \text{ etc.}\right) = F(a_1 : a_1 + a_2 : a_2 + a_3 : a_3 + a_3 : a_3 \text{ etc.}).$$

Man sieht, wie auf diese Weise allmählig der Kettenbruch A in den Kettenbruch B verwandelt wird *).

Andere Verwandelungen werden sich noch später darbieten.

C. Verwandelung der Kettenbrüche in Reihen.

28.

Oft kann es nützlich sein, einen Kettenbruch in eine Reihe zu verwandeln, besonders wenn man den Werth des ersteren erforschen will. Die einfachste Methode, eine solche Verwandelung zu bewerkstelligen, ist folgende. Es sei der endliche oder unendliche Kettenbruch $F(a, a_m)$ gegeben. Man setze

$$F(a,a_m) = a + F(a,a_1) - a + F(a,a_2) - F(a,a_1) + F(a,a_3) - F(a,a_2) \ldots.$$
$$\ldots. + F(a,a_{m-1}) - F(a,a_{m-2}) + F(a,a_m) - F(a,a_{m-1}).$$

Nun ist

$$F(a,a_1) - a = \frac{b_1}{a_1};\ F(a,a_2) - F(a,a_1) = -\frac{b_1 . b_2}{a_1 . a_1, a_2};$$
$$F(a,a_3) - F(a,a_2) = \frac{b_1 . b_2 . b_3}{a_1, a_2 . a_1, a_3} \text{ etc. (§. 8.),}$$

also

$$A.\quad F(a,a_m) = a + \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1 . b_2}{a_1 . a_1, a_2} + \frac{b_1 . b_2 . b_3}{a_1, a_2 . a_1, a_3}.$$

Diese Reihe wird endlich oder unendlich sein, je nachdem es der Kettenbruch ist. Nimmt man statt der ganzen Reihe nur einen Theil der zuerst hervortretenden Glieder, z. B. bis zum Gliede $\pm\frac{b_1 . b_2 \ldots . b_l}{a_1, a_{l-1} . a_1, a_l}$, so folgt aus der Darstellung, durch welche die Reihe gefunden wurde, daſs man alsdann statt $F(a, a_m)$ den Werth von $F(a, a_l)$ findet. Die angenommene Reihe wird also um eben so viel von $F(a, a_m)$ unterschieden sein, wie $F(a, a_l)$, und man findet diesen Unterschied nach §. 8.

Ist $F(a, a_m)$ ein Kettenbruch von der in §. 11. angegebenen Beschaffenheit, so ist jeder spätere Näherungsbruch dem wahren Werthe näher als ein vorhergehender, folglich wird auch die entsprechende Reihe sich dem wahren Werthe desto mehr nähern, je mehr Glieder derselben **) man zusammen nimmt, das heiſst: die Reihe wird convergiren.

---

*) Einzelne hierher gehörende Fälle, wie z. B. $F(1{:}1+1{:}2+2{:}3 \text{ etc.}) = F(2{:}2+3{:}3 \text{ etc.})$ hat schon Euler auf verschiedenen Wegen gefunden.

**) Und die hierdurch entstehenden Werthe werden abwechselnd gröſser oder kleiner als der Werth der ganzen unendlichen Reihe sein (§. 11.).

Der Unterschied der aufeinander folgenden Näherungsbrüche wird immer kleiner, je weiter man in der Rechnung fortgeht, folglich wird auch der Werth der Glieder in der Reihe immer unbedeutender.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel, welches zugleich zeigt, wie man durch solche Verwandlungen den Werth eines Kettenbruchs finden kann.

Es sei der Kettenbruch $F(1:1+1:1+4:1+9:1+16:1 \text{ etc.})$ (wo die Theilzähler die Quadrate aller ganzen Zahlen, die Theilnenner alle $=1$ sind) gegeben, so ist $a=0$, $a_1=1$; $a_1, a_2=2$; $a_1, a_3=6$; $a_1, a_4=24$; .... $b_1=1$; $b_2=1$; $b_3=4$; .... $b_m=(m-1)^2$ und $F(a, a_m)=1-\frac{1}{2}+\frac{4}{12}-\frac{4.9}{6.24}\ldots.=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots.$ Dies ist bekanntlich der Anfang der Reihe, die den Logarithmen von 2 ausdrückt; daſs aber der gegebene Kettenbruch wirklich $=\log 2$ ist, läſst sich, wie folgt, zeigen. Es ist allgemein $a_1, a_m=a_m . a_1, a_{m-1}+b_m . a_1, a_{m-2}$ (§. 6.), also im vorliegenden Falle $a_1, a_m=a_1, a_{m-1}+(m-1)^2(a_1, a_{m-2})$. Ist daher a_1, a_{m-1} $=(m-1)(a_1, a_{m-2})$, so ist auch $a_1, a_m=m . a_1, a_{m-1}$; nun ist aber wirklich $a_1, a_3=3 . a_1, a_2=3.2$; $a_1, a_4=4 . a_1, a_3=4.3.2$, also überhaupt $a_1, a_m=1.2.3\ldots.m$. Das $m$te Glied der entstehenden Reihe ist also

$$=\pm\frac{b_1 . b_2 \ldots . b_m}{a_1, a_{m-1} . a_1, a_m}=\pm\frac{1.2^2.3^2\ldots.(m-1)^2}{(1.2.3\ldots.m-1)^2.m}=\pm\frac{1}{m};$$

welches auch das m^{te} Glied der Reihe, die den $\log 2$ ausdrückt, ist.

Wäre der Kettenbruch $F(1:1+1:2+9:2+25:2 \text{ etc.})$, wo die Theilzähler vom zweiten an die Quadrate der ungraden Zahlen nach ihrer Folge, die Theilnenner vom zweiten an, alle $=2$ sind *), gegeben, so hat man hier $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=(1+1.2)^2$, $b_4=(1+2.2)^2$ und allgemein $b_m=(1+m-2.2)^2=(2m-3)^2$. Ferner ist $a=0$, $a_1=1$; $a_1, a_2=3$; $a_1, a_3=3.5$; $a_1, a_4=3.5.7$; ....; allgemein ist, weil $a_m=2$ und $b_m=(2m-3)^2$, $a_1, a_m=2 . a_1, a_{m-1}+(2m-3)^2 . a_1, a_{m-2}$. Ist daher a_1, a_{m-1} $=(2m-3) . a_1, a_{m-2}$, so ist auch $a_1, a_m=(2m-1) . a_1, a_{m-1}$; nun ist

---

*) Bei dem häufigen Gebrauch solcher Kettenbrüche, deren Theilglieder einem bestimmten Gesetze folgen, wäre es gut, sie durch eine besondere Bezeichnung anzudeuten, durch die das Gesetz sogleich erkannt würde. So z. B. könnte man den vorliegenden Kettenbruch durch $\underset{0-\infty}{x} F[1:1+(2x+1)^2:2]$ andeuten; eben so könnte der Kettenbruch $F(1:1+1:1+4:1+9:1+16:1 \text{ etc.})$ durch $\underset{1-\infty}{x} F[1:1+x^2:1]$ angedeutet werden, indem hierdurch gesagt wird, daſs man im ersten Falle für x nach einander die Werthe 0, 1, 2, 3, ... im zweiten die Werthe 1, 2, 3, ... setzen soll.

aber $a_1, a_2 = 3$; $a_1, a_3 = 5 . a_1, a_2$; $a_1, a_4 = 7 . a_1, a_3$, also überhaupt $a_1, a_m = 3.5.7 \ldots . (2m-1)$; das m^{te} Glied der dem Kettenbruch entsprechenden Reihe ist daher $\frac{3^2 . 5^2 \ldots . (2m-3)^2}{(2m-1).(3^2 . 5^2 \ldots . (2m-3))^2} = \frac{1}{2m-1}$, und die ganze Reihe $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. $= \frac{\pi}{4}$, wo π die Ludolphische Zahl bedeutet, wie bekannt.

Mann kann die Reihe (A.) auch in eine andere verwandeln, die nur positive Glieder hat, wenn man immer zwei auf einander folgende Glieder, deren erstes das + Zeichen vor sich hat, addirt. Die Reihe wird alsdann =

$$a + \frac{b_1 (a_1, a_2 - b_2)}{a_1 . a_1, a_2} + \frac{b_1 . b_2 . b_3 (a_1, a_4 - b_4 . a_1, a_2)}{a_1, a_2 . a_1, a_3 . a_1, a_4} \ldots .$$

Andere Methoden, Kettenbrüche in Reihen zu verwandeln, wird das folgende Capitel darbieten.

29.

Jede Reihe, die unter die Form der Reihe (A.) gebracht werden kann, so dafs $a_1, a_2 \ldots . b_1, b_2 \ldots .$ ganze positive Zahlen sind, wird convergiren, weil man jede Summe eines Theils ihrer ersten Glieder als den Werth eines convergirenden Kettenbruchs betrachten kann. Sind daher $x, x_{,}, x_{,,}, y, y_{,}, y_{,,}$, ganze positive Zahlen, und man setzt $y' . y + x_{,} . m_{,} = A$, so wird jede Reihe convergiren, deren n^{tes}, $n+1^{tes}$, $n+2^{tes}$ Glied bezüglich $= \frac{m . x}{m_{,} . y}$, $\frac{m . x x_{,}}{y . A}$, $\frac{m . x x_{,} x_{,,}}{A (y_{,,} . A + x_{,,} . y)}$ ist, vorausgesetzt, dafs das Vorzeichen des $n+1^{ten}$ Gliedes dem des n^{ten} und $n+2^{ten}$ entgegengesetzt ist.

Zweites Kapitel.

A. Verwandelung der Reihen in Kettenbrüche.

30.

Eben so wie es oft nützlich ist, einen Kettenbruch in eine Reihe zu verwandeln, so kann auch zuweilen das umgekehrte Verfahren, die Verwandelung der Reihe in einen Kettenbruch, mit Nutzen angewandt werden. In der Regel werden diese Reihen nach fortschreitenden Potenzen einer Gröfse x geordnet sein,' und es soll daher im Folgenden gezeigt werden, wie eine Reihe

$$(P.)\quad \frac{\alpha}{\alpha_1}x^m + \frac{\beta}{\beta_1}x^{m+h} + \frac{\gamma}{\gamma_1}x^{m+2h} + \frac{\delta}{\delta_1}x^{m+3h}\ldots\text{*)}$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Es ist aber

$$(P) = \frac{\alpha}{\alpha_1}x^m\left(1 + \frac{\beta\alpha_1}{\alpha\beta_1}x^h + \frac{\gamma\alpha_1}{\alpha\gamma_1}x^{2h} + \ldots\right);$$

es ist also nur nöthig zu zeigen, wie eine Reihe, von der Form des in Klammern eingeschlossenen Ausdrucks, in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Zu diesem Zwecke kann man verschiedene Methoden anwenden.

Erste Methode.

31.

Die einfachste Art, eine Reihe von der Form

$$(Q.)\quad 1 + \frac{A_1}{a_1}x^h + \frac{A_2}{a_2}x^{2h} + \frac{A_3}{a_3}x^{3h}\ldots\text{**)}$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln, ergiebt sich aus 28., wenn man das

---

*) Diese Form schadet übrigens der Allgemeinheit der Untersuchung nicht, indem man $x = 1$ setzen, und $\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1}$ etc. alsdann jede beliebige Reihe ausdrücken kann.

**) Soll dieser Ausdruck auf Reihen, in welchen negative Glieder vorkommen, angewandt werden, so hat man nur nöthig, in den bezüglichen Gliedern Zähler oder Nenner des Coeffizienten negativ zu nehmen.

dortige Verfahren umkehrt. Man setze nemlich $A_1 x^h = b_1$, $A_2 x^{2h} = - b_1 . b_2$, $A_3 x^{3h} = b_1 . b_2 . b_3$ etc., $\alpha_1 = a_1$; $\alpha_2 = a_1 . a_1, a_2$; $\alpha_3 = a_1, a_2 . a_1, a_3$ etc., also ist $b_1 = A_1 x^h$; $b_2 = - \frac{A_2 . x^{2h}}{b_1} = - \frac{A_2 . x^h}{A_1}$; $b_3 = \frac{A_3 x^{3h}}{b_1 . b_2} = - \frac{A_3 . x^h}{A_2}$, und allgemein $b_m = - \frac{A_m . x^h}{A_{m-1}}$; ferner ist $a_1 = \alpha_1$; $a_1, a_2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_1}$; $a_1, a_3 = \frac{\alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_2}$; und wenn m eine gerade Zahl bedeutet, so ist überhaupt, wie leicht einzusehen ist:

$$\frac{\alpha_{m-1} . \alpha_{m-3} \ldots \alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_{m-2} . \alpha_{m-4} \ldots \alpha_2} = a_1, a_{m-1}; \quad \frac{\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots \alpha_2}{\alpha_{m-1} . \alpha_{m-3} \ldots \alpha_1} = a_1, a_m; \quad \frac{\alpha_{m+1} . \alpha_{m-1} \ldots \alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots \alpha_2} = a_1, a_{m+1}.$$

Da aber $a_1, a_{m+1} = a_{m+1} . a_1, a_m + b_{m+1} . a_1, a_{m-1}$, so folgt

$$a_{m+1} = \frac{\frac{\alpha_{m+1} . \alpha_{m-1} \ldots \alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots \alpha_2} + \frac{A_{m+1} . x^h}{A_m} . \frac{\alpha_{m-1} . \alpha_{m-3} \ldots \alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_{m-2} . \alpha_{m-4} \ldots \alpha_2}}{\frac{\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots \alpha_2}{\alpha_{m-1} \, \alpha_{m-3} \ldots \alpha_1}}$$

$$= \frac{(A_m . \alpha_{m+1} + A_{m+1} . x^h . \alpha_m)(\alpha_{m-1} \ldots \alpha_1)^2}{A_m (\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots \alpha_2)^2}.$$

Eben so findet man $a_m = \frac{(A_{m-1} . \alpha_m + A_m . x^h . \alpha_{m-1})(\alpha_{m-2} . \alpha_{m-4} \ldots \alpha_2)^2}{A_{m-1} (\alpha_{m-1} . \alpha_{m-3} \ldots \alpha_1)^2}$.

Aus der Reihe (Q.) entsteht also der Kettenbruch $F(a_1 a_m) =$

$$F\left(1 + A_1 x^h : \alpha_1 - \frac{A_2 . x^h}{A_1} : \frac{(A_1 . \alpha_2 + A_2 . x^h . \alpha_1)}{A_2 . \alpha_1^2} - \frac{A_3 . x^h}{A_2} : \frac{(A_2 . \alpha_3 + A_3 . x^h . \alpha_2) . \alpha_1^2}{A_3 . \alpha_2^2} - \frac{A_4 . x^h}{A_3} : \frac{(A_3 . \alpha_4 + A_4 . x^h . \alpha_3) . (\alpha_2)^2}{A_3 (\alpha_3 . \alpha_1)^2} \text{ etc.}\right)$$

Schafft man aus diesem Kettenbruche alle gebrochenen Theilzähler und Theilnenner, und die überflüssigen Factoren weg (§. 10. und 18.) so findet man $F(a, a_m) =$

$$F\left(1 + A_1 x^h : \alpha_1 - \alpha_1^2 . A_2 x^h : (A_1 \alpha_2 + A_2 . x^h . \alpha_1) - A_1 . \alpha_2^2 . A_3 x^h : (A_2 . \alpha_3 + A_3 . x^h . \alpha_1) - A_2 . \alpha_3^2 . A_4 . x^h : (A_3 \alpha_4 + A_4 . x^h . \alpha_3) \text{ etc.}\right)$$ *).

32.

Es soll z. B. das Binomium $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n . n-1}{1.2} x^2 + \frac{n . n-1 . n-2}{1.2.3} x^3 \ldots$ in einen Kettenbruch verwandelt werden; man setze, um diese Reihe mit

---

*) Nach §. 28. Anmerk. liefse sich diese Formel durch

$$\overset{m}{_{1-x}} F\left(1 + \frac{A_1 . x^h}{\alpha_1 - \frac{A_{m-1} . \alpha_m^2 . A_{m+1} . x^h}{A_m . \alpha_{m+1} + A_{m+1} . x^h . \alpha_m}}\right)$$

bezeichnen, wenn man $A_0 = 1$ setzt; ist die Reihe eine endliche, so wird irgend ein Werth $A_s = 0$ sein, und alsdann auch der Kettenbruch ein endlicher sein, weil auch A_{s+1}, A_{s+2} etc. alsdann $= 0$ sind.

der Reihe (Q.) zu vergleichen, $A_1 = n$, $A_2 = n.n-1$, $A_3 = n.n-1.n-2\ldots$ $\ldots\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1.2, \ldots.\alpha_m = 1.2\ldots.m$; $h = 1$, so erhält man

$$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{n.n-1.x}{1.2.n + n.n-1.x - \cfrac{n.1.2^2.n.n-1.n-2.x}{n.n-1.1.2.3 + n.n-1.n-2.2.x - \cfrac{n.n-1(2.3)^2.n.n-1.n-2.n-3.x}{n.n-1.n-2.2.3.4 + n.n-1.n-2.n-3.2.3.x \text{ etc.}}}}}$$

und wenn man den Bruch reducirt:

$$1.\quad (1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{(n-1)x}{2 + (n-1)x - \cfrac{2.(n-2).x}{3 + (n-2)x - \cfrac{3(n-3)x}{4 + (n-3)x \text{ etc.}}}}}$$

welchen Ausdruck man durch ${}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{m.(n-m)x}{m+1+(n-m).x}}\right)$ andeuten kann.

Man bemerke, dafs der Bruch abbricht, wenn n eine ganze Zahl ist, sobald $m = n$ wird.

Nimmt man $-n$ statt n, so hat man:

$$2.\quad (1+x)^{-n} = 1 - \cfrac{nx}{1 - \cfrac{(-n-1)x}{2 + (-n-1)x - \cfrac{2(-n-2)x}{3 + (-n-2)x \text{ etc.}}}} = 1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(n+1)x}{2 - (n+1)x + \cfrac{2(n+2)x}{3 - (n+2)x \text{ etc.}}}}$$

$$= {}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m.(m+n)x}{m+1-(m+n)x}}\right),$$

welcher Bruch ebenfalls abbricht, wenn n eine ganze Zahl ist.

Da $(1+x)^{-1} = \frac{1}{(1+x)^n}$ ist, so folgt aus (1.):

$$(1+x)^{-n} = \frac{1}{{}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{m(n-m)x}{m+1+(n-m)x}}\right)} = \frac{1}{{}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m-n)x}{m+1-(m-n)}}\right)}.$$

Eben so findet man aus (2.)

$$(1+x)^n = \frac{1}{{}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m+n)x}{m+1-(m+n)x}}\right)}.$$

Man hat also die merkwürdige Beziehung:

$${}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m-n)x}{m+1-(m-n)x}}\right) = \frac{1}{{}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m+n)x}{m+1-(m+n)x}}\right)}.$$

33.

Es sei die Reihe $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} \ldots$ gegeben, welche man bekanntlich aus $\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ erhält, wenn man nach der Integration $x = 1$ setzt, und diese Reihe soll in einen Kettenbruch verwandelt werden, so ist, im Vergleich mit der Reihe (Q.), $x = 1$, $A_1 = A_2 = A_3$ etc. $= 1$, $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = -(m+n)$, $\alpha_3 = m + 2n$, und überhaupt $\alpha_{2r+1} = (m + 2rn)$, $\alpha_{2r} = -(m + (2r-1)n)$, und die ganze Reihe $= Q - 1$, also

$$= \cfrac{1}{m - \cfrac{m^2}{-(m+n) + m - \cfrac{(m+n)^2}{m+2n-(m+n) - \cfrac{(m+2n)^2}{-m+3n+(m+2n) - \text{etc.}}}}}$$

Reducirt man den Bruch und verändert die Zeichen (nach §. 19.), so verwandelt sich dieser Bruch in folgenden: $F(1 : m + m^2 : n + (m+n)^2 : n$ etc.), welchen man durch ${}^{\;x}_{0-x}F\left(\cfrac{1}{m + \cfrac{(m+xn)^2}{n}}\right)$ bezeichnen kann, oder durch

$${}^{\;x}_{0-\infty}F[1 : m + (m+xn)^2 : n].$$

Setzt man $m = 1$, $n = 2$, so wird die Reihe $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. $= \frac{\pi}{4}$, und Kettenbruch $\frac{\pi}{4} = {}^{\;x}_{0-x}F[1 : 1 + (1+2x)^2 : 2]$ *), wie schon früher (§. 28.) gefunden wurde.

34.

Substituirt man in §. 32. statt n den Exponenten $r+n$, so hat man nach Formel (1.),

(a.) $(1+x)^{r+n} = {}^{\;m}_{1-x}F[1+(r+n)x : 1-m(r+n-m)x : (m+1+(r+n-m)x)]$.

Nun ist

(b.) $(1+x)^r = {}^{\;r}_{1-x}F[1+rx : 1-m(r-m)x : (m+1+(n-m)x)]$,

(c.) $(1+x)^n = {}^{\;n}_{1-x}F[1+nx : 1-m(n-m)x : (m+1+(n-m)x)]$,

---

*) Dieser Kettenbruch ist historisch merkwürdig, weil er die erste Veranlassung zur Ausbildung der Theorie der Kettenbrüche war. Er wurde von Baron Brounker gefunden, der ihn Wallis (s. dessen *Arithm. Inf. Prop.* 191.) mittheilte. Euler behauptet an mehreren Orten (z. B. *mém. de l'ac. de Pétersb. T.* 5. *pag.* 31.), Brounker habe diesen Kettenbruch aus der schon vor Leibnitz bekannten Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ etc. abgeleitet, indessen scheint doch aus Wallis Worten hervorzugehen, dafs Brounker ihn auf dem viel weitläufigeren, von Wallis angegebenen Wege, gefunden hat, denn in der angeführten Stelle heifst es: *quum vero nobilissimo viro difficilius persuasum iri video, ut illud ipse suscipere velit, conabor ego rem illam ad ipsius mentem, quam possim, proxime, breviter exhibere.*

also

$$(a) = (b).(c).$$

Man sieht leicht wie sich auf ähnliche Weise noch unendlich viele Beziehungen finden lassen. Hätte man den Ausdruck

$$\frac{A.x^m + A_1.x^{m+h} + A_2.x^{m+2h}\ldots}{Bx^n + B_1 x^{n+k} + B_2 x^{n+2k}\ldots},$$

welchen man in einen Kettenbruch verwandeln will, so müfste man ihn erst nach bekannten Regeln in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, und auf diese das gezeigte Verfahren anwenden *).

Zweite Methode.

35.

Die Kettenbrüche, welche man nach der ersten Methode aus den Reihen erhält, haben alle, wie die allgemeine Form zeigt, sowohl in allen Theilzählern als Theilnennern, die Gröfse x. Die zweite Methode aber beruht auf einem auch sonst in der Analysis gebräuchlichen Verfahren, wodurch man Kettenbrüche von anderer Form erhalten kann. Man denkt sich nemlich den Kettenbruch als schon vorhanden, und vergleicht ihn mit der gegebenen Reihe, wodurch man den Werth der einzelnen Theilzähler und Theilnenner erhält. Die Form des Kettenbruchs könnte also hypothetisch willkürlich angenommen werden; aber am brauchbarsten werden diejenigen Kettenbrüche sein, bei welchen die Gröfse x entweder nur in allen Theilzählern oder in allen Theilzählern und Theilnennern vorkommt; es sollen daher nur Kettenbrüche dieser Art berücksichtigt werden.

36.

Es sei also die Reihe

$$(T.)\quad 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \text{ etc.}$$

gegeben, welche in einen Kettenbruch verwandelt werden soll, dessen Theilzähler alle $= x$ sind. Man setze den gesuchten Kettenbruch $= F(1 + x : a_1 + x : a_2 + x : a_3 \text{ etc.})$ **), so ist

$A_1 x + A_2 x^2 \ldots = F(x : a_1 + x : a_2 \ldots)$ oder $A_1 + A_2 x \ldots = F(1 : a_1 + x : a_2 \ldots)$.

Ferner setze man $F(a_1 + x : a_3 \ldots) = P$, also ist $A_1 + A_2 x \ldots = \frac{1}{a_1 + \frac{x}{P}}$ und

---

*) Über diese Methode, Reihen in Kettenbrüche zu verwandeln, s. m. besonders Euler in *Introd. in Anal. inf.* und *Opusc. analyt.* *T.* 2. *pag.* 138 ff.

**) Die Formel $F(1 + \alpha_1 x : a_1 + \alpha_2 x : a_2 \text{ etc.})$ würde nicht allgemeiner sein, weil es immer möglich ist, die Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ aus dem Zähler zu schaffen (§. 18.).

$$(1.)\quad (A_1 + A_2 x \ldots.)\left(a_1 + \frac{x}{P}\right) - 1 = 0,$$

folglich, da die constanten Glieder einander aufheben müssen:

$$A_1 a_1 - 1 = 0 \text{ oder } a_1 = \frac{1}{A_1},$$

und man erhält aus (1.) die Gleichung:

$$a_1(A_2 x + A_3 x^2 \ldots.) + \frac{x}{P}(A_1 + A_2 x \ldots.) = 0,$$

oder

$$a_1 P(A_2 x + A_3 x^2 \ldots.) + x(A_1 + A_2 x \ldots.) = 0,$$

also auch

$$a_1 P(A_2 + A_3 x \ldots.) + (A_1 + A_2 x \ldots.) = 0.$$

Man setze nun $P = a_2 + \frac{x}{P_1}$, so hat man

$$(2.)\quad a_1\left(a_2 + \frac{x}{P_1}\right)(A_2 + A_3 x \ldots.) + (A_1 + A_2 x \ldots.) = 0,$$

also auch

$$a_1 a_2 A_2 + A_1 = 0, \text{ und } a_2 = -\frac{A_1}{a_1 A_2}.$$

Aus Gleichung (2.) folgt wieder

$$a_1 a_2(A_3 + A_4 x \ldots.) + \frac{a_1}{P_1}(A_2 + A_3 x \ldots.) + (A_2 + A_3 x \ldots.) = 0,$$

und wenn man $P_1 = a_3 + \frac{x}{P_2}$ setzt:

$$3.\quad a_1 a_2\left(a_3 + \frac{x}{P_2}\right)(A_3 + A_4 x \ldots.) + a_1(A_2 + A_3 x \ldots.) + \left(a_3 + \frac{x}{P_2}\right)(A_2 + A_3 x \ldots.) = 0,$$

also

$$a_1 a_2 a_3 A_3 + a_1 A_2 + a_3 A_2 = 0, \text{ d. h. } a_3 = -\frac{a_1 A_2}{A_2 + a_1 a_2 A_3}.$$

Aus (3.) würde man wieder die Bedingungsgleichung

$$a_1 a_2 a_3 a_4 A_4 + a_1 a_2 A_3 + a_1 a_4 A_3 + a_3 a_4 A_3 + A_2 = 0$$

erhalten, woraus wieder a_4 gefunden wird, und so könnte man allmälig alle Theilnenner des Kettenbruches finden.

Es ist aber leicht, jede folgende Bedingungsgleichung aus der vorhergehenden abzuleiten. Schreibt man nemlich die schon erhaltenen auf etwas geänderte Weise, so findet man

$$a_1 A_2 a_2 + A_1 = 0,$$
$$(a_1 A_3 a_2 + A_2) a_3 + a_1 A_2 = 0,$$
$$[(a_1 a_2 A_4 + A_3) a_3 + a_1 A_3] a_4 + a_1 a_2 A_3 + A_2 = 0.$$

Hieraus kann man nach Analogie folgendes Gesetz ableiten:

Wenn a_m durch die Gleichung $Q a_m + q = 0$ bestimmt wird, so daſs q nicht a_m enthält, so wird a_{m+1} durch die Gleichung $(Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = 0$ bestimmt, wo Q_1, q_1, die Ausdrücke bedeuten, die man erhält,

wenn man in Q und q den Index *) aller darin vorkommender A um eine Einheit erhöht.

Um die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes einzusehen, nehme man an, es sei die Gleichung $Qa_m + q = 0$ aus der Gleichung

$$(U.)\quad \left(a_m + \frac{x}{P_{m-1}}\right)(Q + Q_1 x + Q_2 x^2 \ldots) + q + q_1 x + q_2 x^2 \ldots = 0$$

entstanden, wo $P_{m-1} = a_{m+1} + \frac{x}{a_{m+2} \text{ etc.}}$ ist, und Q_n, q_n die Ausdrücke bedeuten, die man aus Q_{n-1}, q_{n-1} erhält, indem man den Index aller in Q_{n-1}, q_{n-1} vorkommender A um eine Einheit erhöht. Läfst man die constanten Glieder weg, und dividirt mit x, so verwandelt sich die Gleichung $(U.)$, wenn man zugleich statt P_{m-1} den Werth $a_{m+1} + \frac{x}{P_m}$ setzt, in folgende:

$$\left(a_{m+1} + \frac{x}{P_m}\right)[(Q_1 a_m + q_1) + (Q_2 a_m + q_2)x + \ldots] + Q + Q_1 x + Q_2 x^2 \ldots = 0,$$

und hieraus folgt

$$(Q_1 a_m + q_1)a_{m+1} + Q = 0.$$

Die Formel $(U.)$ ist aber, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, für die Werthe $m = 2$, $m = 3$, folglich auch für alle folgende Werthe von m richtig, und das angegebene Gesetz ist daher allgemein.

37.

Aus den Formeln $a_m = -\frac{q}{Q}$, $a_{m+1} = -\frac{Q}{Q_1 a_m + q}$ folgt, dafs der Nenner des Bruches, durch welchen irgend ein Theilnenner bestimmt wird, der Zähler des Bruches ist, durch welchen der darauf folgende Theilnenner bestimmt wird. Um daher das Bildungsgesetz dieser Theilnenner zu kennen, hat man nur nöthig, das der Nenner der Brüche, durch welche sie bestimmt werden, zu suchen. In der Folge soll N_m der Nenner des Bruches sein, durch welchen a_m bestimmt wird, so dafs $a_m = -\frac{N_{m-1}}{N_m}$ ist.

38.

Hat man den Kettenbruch $F(a_1, a_m) = F(a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_m)$, so kommen in dem Zähler dieses Kettenbruches a_1, a_m Glieder vor, welche alle Elemente a_1, $a_2 \ldots a_m$, andere, die nur $m-2$, $m-4$ u. s. w. Elemente enthalten. Man bezeichne die Summe der Glieder, die $m-n$ Elemente enthalten, durch $(a_1, a_m)_n$, so ist

*) Es versteht sich von selbst, dafs man sich hierbei a_1, a_2 u. s. w. nicht selbst wieder durch A_1, A_2 u. s. w. ausgedrückt denken darf.

$$a_1 . a_m = (a_1, a_m)_0 + (a_1, a_m)_2 + (a_1, a_m)_4 \ldots \text{*)}.$$

Nun ist $\quad a_1, a_{m+1} = a_{m+1} . a_1, a_m + a_1, a_{m-1}$ (§. 6.),

folglich auch $\quad (a_1, a_{m+1})_n = a_{m+1} . (a_1, a_m)_n + (a_1, a_{m-1})_{n-2}$.

Giebt man nun den Buchstaben a_1, a_2, u. s. w. dieselbe Bedeutung, wie in den vorhergehenden §§., so hat man allgemein

$$N_m = (a_1, a_{m-1})_0 . A_m + (a_1, a_{m-1})_2 . A_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 . A_{m-2} \ldots$$

Angenommen, es sei dieser Ausdruck bis zu einem gewissen Werthe von m richtig, so dafs

4. $N_{m-1} = (a_1, a_{m-2})_0 . A_{m-1} + (a_1, a_{m-2})_2 . A_{m-2} + (a_1, a_{m-2})_4 A_{m-3} \ldots$

5. $N_m = (a_1, a_{m-1})_0 . A_m + (a_1, a_{m-1})_2 . A_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 A_{m-2} \ldots$

so hat man

$$a_m N_m + N_{m-1} = a_m (a_1, a_{m-1})_0 A_m + [a_m (a_1, a_{m-1})_2 + (a_1, a_{m-2})_0] A_{m-1} +$$
$$[a_m (a_1, a_{m-1})_4 + (a_1, a_{m-2})_2] A_{m-2} \ldots = (a_1, a_m)_0 A_m + (a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} \ldots$$

Es ist aber, nach (§. 36.), $N_{m+1} = a_m N_m + N_{m-1}$, vorausgesetzt, dafs man den Index der A, in N_m und N_{m-1} überall um eine Einheit erhöhet, folglich ist

$$N_{m+1} = (a_1, a_m)_0 A_{m+1} + (a_1, a_m)_2 A_m + (a_1, a_m)_4 A_{m-1} \ldots$$

also die angenommene Form auch noch für den Werth $m+1$ richtig. Aus §. 36. folgt aber

$$N_3 = (a_1, a_2)_0 A_3 + (a_1, a_2)_2 A_2,$$
$$N_4 = (a_1, a_3)_0 A_4 + (a_1, a_3)_2 A_3.$$

Die Formeln (4.), (5.) sind daher für den Fall $m = 4$, und also auch für alle folgende Werthe von m richtig.

Man hat also folgende Regel: Will man den Nenner des Bruches wissen, der den Werth von a_m angiebt, so bilde man aus den bekannten Werthen a_1, a_2, ... a_{m-1} einen Kettenbruch $F(a_1 + 1 : a_2 \ldots + 1 : a_{m-1})$, nehme den Zähler a_1, a_{m-1} dieses Bruches und multiplicire jeden Theil $(a_1, a_{m-1})_{2n}$ mit A_{m-n}, so giebt die Summe dieser Producte den gesuchten Nenner. Da aber $a_m = -\frac{N_{m-1}}{N_m}$ ist, so hat man

$$a_m = -\frac{(a_1, a_{m-2})_0 A_{m-1} + (a_1, a_{m-2})_2 A_{m-2} + \ldots}{(a_1, a_{m-1})_0 A_m + (a_1, a_{m-1})_2 A_{m-1} + \ldots}.$$

Eigentlich mufs man bei dem Werthe von N_m zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $m = 2n$, oder $= 2n+1$, d. h. eine gerade oder ungerade Zahl ist. Je nachdem der eine oder andere Fall eintritt, hat man

$$N_{2n} = (a_1, a_{2n-1})_0 . A_{2n} + (a_1, a_{2n-1})_2 . A_{2n-1} + \ldots + (a_1, a_{2n-1})_{2n-2} . A_{n+1},$$

---

*) Ist m eine gerade Zahl, so ist das letzte Glied dieses Ausdrucks $(a_1, a_m)_m = 1$.

oder

$$N_{2n+1} = (a_1, a_{2n})_0 \, . \, A_{2n+1} + (a_1, a_{2n})_2 \, . \, A_{2n} + \ldots + (a_1, a_{2n})_{2n-2} A_{n+2} + A_{n+1}.$$

Man bemerke noch Folgendes: Ist $N_{m-1} = \frac{1}{a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_{m-1}}$, so ist auch $N_m = -\frac{N_{m-1}}{N_m} = \frac{1}{a_1 . a_2 . a_3 \ldots . a_m}$. Da nun $N_2 = a_1 A_2 = -\frac{A_1}{a_1}$ und $A_1 = \frac{1}{a_1}$ (§. 36.), also $N_2 = -\frac{1}{a_1 . a_2}$ ist, so hat man allgemein:

$$N_{2m} = -\frac{1}{a_1 . a_2 \ldots . a_{2m}}, \quad N_{2m+1} = \frac{1}{a_1 . a_2 \ldots . a_{2m+1}}$$

oder

$$N_{2m} = -\frac{1}{(a_1, a_{2m})_0}, \qquad N_{2m+1} = \frac{1}{(a_1, a_{2m+1})_0}.$$

Hierdurch hat man einen bequemeren Ausdruck für a_m gewonnen, nemlich

$$a_m = \pm \frac{1}{(a_1, a_{m-1})_0} \times \frac{1}{(a_1, a_{m-1})_0 A_m + (a_1, a_{m-1})_2 A_{m-1} + \ldots},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

39.

Es sei die Reihe $x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} \ldots\right) = \log(1 + x)$ gegeben, die nach §. 36. in einen Kettenbruch verwandelt werden soll. Hier ist $(T.) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \ldots$ und daher $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{3}$, $A_3 = -\frac{1}{4}$ etc. allgemein $A_{2m-1} = -\frac{1}{2m}$, $A_{2m} = \frac{1}{2m+1}$. Man findet daher die Werthe von a_1, a_2 u. s. w. nach §. 36. auf folgende Weise. Es ist

$$a_1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 = -2 . 1^3,$$

$$-2 A_2 . a_2 + A_1 = 0,$$

also

$$a_2 = -\frac{3}{4} = -\frac{3}{1^2 . 2^2},$$

$$-2 A_3 a_2 + A_2 = \frac{3}{2} A_3 + A_2 = -\frac{1}{24},$$

also

$$\left(\tfrac{3}{2} A_3 + A_2\right) a_3 - 2 A_2 = 0,$$

und

$$a_3 = -16 = -2 . 2^3,$$

$$\left(\tfrac{3}{2} A_4 + A_3\right) a_3 - 2 A_3 = \frac{3}{16},$$

$$\left[\left(\tfrac{3}{2} A_4 + A_3\right) a_3 - 2 A_3\right] a_4 + \tfrac{3}{2} A_3 + A_2 = 0,$$

oder

$$a_4 - \frac{5}{36} = -\frac{5}{2^2 . 3^2}.$$

Führt man auf diese Weise fort, so findet man, dafs überhaupt

$$a_{2m} = -\frac{2m+1}{m^2.(m+1)^2},\quad a_{2m+1} := -2(m+1)^3$$

ist, und man hat daher

$$\log(1+x) = x.F\left(1+x:-2+x:-\frac{3}{1^2.2^2}+x:-2.2^3+x:-\frac{5}{2^2.3^2}\dots\right)$$
$$= x.F\left(1-x:2+x:\frac{3}{1^2.2^2}+x:2.2^3\dots\right)\dots \text{ (§. 19.)}$$

oder

$$\log(1+x) = x.{}_{1-x}^{m}F\left(1-x:2+x:\frac{2m+1}{m^2(m+1)^2}+x:2(m+1)^3\right).$$

Wäre der Ausdruck $(1+x)^m = 1+mx+\frac{m.m-1}{1.2}x^2\dots$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hätte man $a_1 = \frac{1}{m}$; $\frac{1}{m}A_2.a_2+A_1 = 0$, also $a_2 = -\frac{2m}{m-1}$; $\frac{1}{m}A_3.a_2+A_2 = \frac{m.m+1}{1.2.3}$; $\left(\frac{1}{m}A_3.a_2+A_2\right)a_3+\frac{1}{m}A_2 = 0$; also

$$a_3 = -\frac{3(m-1)}{m.m+1},$$

und man finde allgemein

$$a_{2n} = \pm\frac{2.m.(m+1)\dots(m+n-1)}{m-1.(m-2)\dots(m-n)},\quad a_{2n+1} = \pm\frac{(2n+1).(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{m.(m+1)\dots(m+n)},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Man überzeugt sich leicht, dafs der entsprechende Kettenbruch abbricht, wenn m eine ganze, positive oder negative Zahl ist, und kann hier ähnliche Betrachtungen wie in §. 32. anstellen.

Aus der Gleichung $(U.)$ in §. 36. folgt

$$a_m(Q_1x+Q_2x^2\dots)+\frac{x}{P_{m-1}}(Q+Q_1x+\dots)+q_1x+q_2x^2\dots = 0,$$

oder

$$P_{m-1} = -\frac{Q+Q_1x+Q_2x^2\dots}{a_mQ_1+q_1+(a_mQ_2+q_2)x+(a_mQ_3+q_3)x^2\dots},$$

durch welche Formel der Rest des Kettenbruchs ausgedrückt wird, wenn man denselben bis zum Theilnenner a_m berechnet hat.

40.

Es ist nun leicht, auch den Ausdruck $\frac{1+A_1x+A_2x^2+\dots}{1+B_1x+B_2x^2+\dots}$ in einen Kettenbruch $F(1+x:a_1+x:a_2\dots)$ zu verwandeln. Angenommen, dafs P, $P_1\dots$ dieselbe Bedeutung haben wie in §. 36., so findet man

$$\frac{1+A_1x+A_2x^2\dots}{1+B_1x+B_2x^2\dots} = \frac{a_1+\frac{x}{P}+x}{a_1+\frac{x}{P}}$$

und

$$\left(a_1+\frac{x}{P}\right)[(A_1-B_1)x+(A_2-B_2)x^2+\ldots.]-x(1+B_1x+B_2x^2\ldots.)=0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit x, und setzt zugleich $A_m-B_m=C_m$, so hat man

$$(U_1.)\quad (C_1+C_2x+\ldots.)\left(a_1+\frac{x}{P}\right)-1-(B_1x+B_2x^2\ldots.)=0.$$

Diese Gleichung enthält alle Glieder, welche die Gleichung (1.) in §. 36. enthält, sobald man statt A den Buchstaben C setzt, aufserdem aber noch die Glieder B_1x, $B_2x^2\ldots.$ Die Bedingungsgleichungen werden also dieselben Glieder enthalten, wie die des erwähnten §., sobald statt A der Buchstabe C gesetzt wird, nur werden noch einige den Buchstaben B enthaltende Glieder dazu kommen. Die Entwickelung der Gleichung $(U_1.)$ zeigt dies am besten. Zuerst folgt aus derselben

$$a_1C_1-1=0 \text{ und } a_1=\frac{1}{C_1},$$

also

$$a_1(C_2x+C_3x^2\ldots.)+\frac{x}{a_2+\frac{x}{P_1}}(C_1+C_2x\ldots.)-(B_1x+B_2x^2\ldots.)=0,$$

oder

$$\left(a_2+\frac{x}{P_1}\right)[a_1C_2-B_1+(a_1C_3-B_2)x+(a_1C_4-B_3)x^2\ldots.]+C_1+C_2x\ldots.=0.$$

Die Glieder, welche B enthalten, erhält man aus denjenigen, die C enthalten, indem man statt a_1C_2, a_1C_3 u. s. w. bezüglich $-B_1$, $-B_2$ u. s. w. setzt. Man findet daher die Bedingungsgleichungen auf folgende Weise: Man denke sich zuerst, es sei die Gleichung

$$(m.)\quad (C_1+C_2x\ldots.)\left(a_1+\frac{x}{P}\right)-1=0$$

gegeben (d. h. man nehme an, es solle die Reihe $1+C_1x+C_2x^2\ldots.$ in einen Kettenbruch $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ verwandelt werden), und entwickele die Bedingungsgleichungen, die die Werthe von a_1, a_2 u. s. w. bestimmen, nach §. 36. ff.; man setze in den erhaltenen Bedingungsgleichungen $a_1C_2=-B_1$, $a_1C_3=-B_2$ u. s. w. und addire die hieraus entstehenden Glieder zu den schon erhaltenen, so hat man die wahren Bedingungsgleichungen. Aus der Gleichung $(m.)$ erhielte man z. B. die Bedingungsgleichungen

$$a_1C_2a_2+C_1=0,$$
$$(a_1a_1C_3+C_2)a_3+a_1C_2=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

daher sind die wahren Bedingungsgleichungen:

$$a_1 C_2 a_2 + C_1 - B_1 a_2 = 0,$$

$$(a_1 a_2 C_3 + C_2) a_3 + a_1 C_2 - a_2 B_2 a_3 - B_1 = 0,$$

. . . .

41.

Zwei auf einander folgende, aus der Gleichung (m.) entwickelte Bedingungsgleichungen werden allgemein durch die Formeln

$$1. \quad Q a_m + q = 0,$$

$$2. \quad (Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = 0$$

dargestellt werden können, wenn man unter Q_1, q_1 die Werthe versteht, die man aus Q, q, erhält, indem man den Index der C überall um eine Einheit erhöht (§. 36.).

Aus (1.) und (2.) erhält man die wahren Bedingungsgleichungen

$$3. \quad (Q - R) a_m + q - r = 0,$$

$$4. \quad [(Q_1 - R_1) a_m + q_1 - r_1] a_{m+1} + Q - R = 0,$$

wo R, r, R_1, r_1, die Werthe bedeuten, die man erhält, indem man in Q, q, Q_1, q_1 statt $a_1 C_2$, $a_1 C_3$ u. s. w. $-B_1$, $-B_2$ u. s. w. setzt. Man würde aber R_1, r_1 auch unmittelbar aus R, r, erhalten können, indem man den Index der B um eine Einheit erhöhte, und man kann daher sagen: Ist ein Theilnenner a_m durch die Gleichung $0 = S a_m + T$ gegeben, so erhält man den folgenden a_{m+1} durch die Gleichung $(S_1 a_m + T_1) a_{m+1} + S = 0$, wo S_1, T_1 die Werthe bedeuten, die man aus S und T erhält, indem man den Index aller C und aller B um eine Einheit erhöht. Auch hier ist also der Nenner des Bruches, durch welchen a_m bestimmt wird, der Zähler desjenigen, durch welchen a_{m+1} bestimmt wird, und man hat daher auch hier nur nöthig, das Bildungsgesetz der Nenner dieser Brüche zu erforschen. Bezeichnet man wieder durch N_m den Nenner des Bruches, durch welchen a_m bestimmt wird, so giebt die Gleichung (5.) in §. 38. sogleich den Theil des Werthes von N_m, in welchem C vorkommt, nemlich

$$(a_1, a_{m-1})_0 C_m + (a_1, a_{m-1})_2 C_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 C_{m-2} + \dots$$

Hieraus mufs der andere Theil des Werthes von N_m abgeleitet werden, indem man allgemein statt $a_1 C_n$ den Werth $-B_{n-1}$ setzt. In dieser Hinsicht bemerke man, dafs $a_1, a_{m-1} = a_1 . a_2, a_{m-1} + a_3, a_{m-1}$, und daher auch $(a_1, a_{m-1})_{2n} = a_1 (a_2, a_{m-1})_{2n} + (a_3, a_{m-1})_{2n-2} \dots$ (§. 4.). Aus irgend einem Gliede $(a_1, a_{m-1})_{2n} . C_{m-n}$ folgt daher durch die erwähnte Substitution das Glied $-B_{m-n-1} (a_2, a_{m-1})_{2n}$, und man hat daher:

$$N_m = \left\{ \begin{array}{l} (a_1,\ a_{m-1})_0\, C_m + (a_1,\ a_{m-1})_2\, C_{m-1} + (a_1,\ a_{m-1})_4\, C_{m-2} \dots \\ \qquad\qquad - (a_2,\ a_{m-1})_0 B_{m-1} - (a_2,\ a_{m-1})_2\, B_{m-2} \dots \end{array} \right.$$

Man mufs auch hier zwei Fälle unterscheiden, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist $m = 2n$, so hat man

$$N_{2n} = \left\{ \begin{array}{l} (a_1,\ a_{2n-1})_0\, C_{2n} + (a_1,\ a_{2n-1})_2\, C_{2n-1} + \dots + (a_1,\ a_{2n-1})_{2n-2} .\, C_{n+1} \\ \qquad\qquad - (a_2,\ a_{2n-1})_0 B_{2n-1} + \dots - (a_2,\ a_{2n-1})_{2n-4} . B_{n+1} - B_n ; \end{array} \right.$$

ist dagegen $m = 2n + 1$, so hat man:

$$N_{2n+1} = \left\{ \begin{array}{l} (a_1,\ a_{2n})_0 C_{2n+1} + (a_1,\ a_{2n})_2\, C_{2n} + \dots + (a_1,\ a_{2n})_{2n-2}\, C_{n+2} + C_{n+1} \\ \qquad\qquad - (a_2,\ a_{2n})_0 B_{2n} + \dots - (a_2,\ a_{2n})_{2n-4} B_{n+2} - (a_2,\ a_{2n})_{2n-2}\, B_{n+1} . \end{array} \right.$$

Da $a = -\frac{N_{m-1}}{N_m}$ ist, so wird $N_m = \frac{1}{a_1 . a_2 \dots a_m}$, wenn $N_{m-1} = \frac{-1}{a_1 . a_2 \dots a_{m-1}}$ ist. Nun hat man (§.40.) $a_1 C_2 a_2 + C_1 = 0$, also $N_2 = a_1 C_2 = -\frac{C_1}{a_2}$, aber $a_1 = \frac{1}{C_1}$, also $N_2 = -\frac{1}{a_1 . a_2}$, und daher allgemein:

$$N_{2n} = -\frac{1}{a_1 . a_2 \dots a_{2n}}, \quad N_{2n+1} = \frac{1}{a_1 . a_2 \dots a_{2n+1}} .$$

42.

Es soll z. B. der Ausdruck

$$\frac{x(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = \frac{x(e^{2x} + 1)}{e^{2x} - 1} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \dots}$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden. Man setze $x^2 = y$, so geht dieser Ausdruck in folgenden über: $\dfrac{1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} + \frac{y^3}{6!} + \dots}{1 + \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} + \frac{y^3}{7!} + \dots}$. Hier ist $C_1 = -\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}$ $= \frac{2}{3!}$, $C_2 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} = -\frac{4}{5!}$, $C_3 = -\frac{1}{7!} + \frac{1}{6!} = \frac{6}{7!}$, allgemein $C_m = \frac{2m}{(2m+1)!}$ und $B_m = \frac{1}{(2m+1)!}$, also

$$a_1 = \frac{1}{C_1} = 3,$$

$$N_2 = a_1 C_2 - B_1 = \frac{1}{3.5}, \quad a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3.5}} = 5,$$

$$N_3 = a_1 a_2 C_3 + C_1 - a_2 B_2 = \frac{1}{3.5.7}, \quad a_3 = \frac{\frac{1}{3.5}}{\frac{1}{3.5.7}} = 7.$$

Führt man auf diese Weise fort, so findet man dafs allgemein $a_m = 2m + 1$ ist, und es ist daher der entsprechende Kettenbruch $= {}_1^{m}\!\!_{\infty} F[1 + x^2 : (2m+1)]$.

43.

Soll der Ausdruck $\frac{1}{1 + B_1 x + B_2 x^2 \ldots .}$ in einen Kettenbruch

$$F(1 + x : a_1 + x : a_2 \ldots .)$$

verwandelt werden, so erhält man die gesuchten Werthe sogleich aus §. 40., wenn man $A_1, A_2 \ldots . = 0$ setzt, d. h. statt C_n überall $-B_n$ substituirt; also ist

$$N_{2n} = \left\{ \begin{matrix} -(a_1, a_{2n-1})_0 . B_{2n} - (a_1, a_{2n-1})_2 . B_{2n-1} - \ldots - (a_1, a_{2n-1})_{2n-2} B_{n+1} \\ -(a_2, a_{2n-1})_0 . B_{2n-1} \ldots . - (a_2, a_{2n-1})_{2n-4} . B_{n+1} - B_n \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{a_1 . a_2 \ldots a_{2n}},$$

und

$$N_{2n+1} = \left\{ \begin{matrix} -(a_1, a_{2n})_0 . B_{2n+1} - (a_1, a_{2n})_2 . B_{2n} - \ldots - (a_1, a_{2n})_{2n-2} . B_{n+2} - B_{n+1} \\ -(a_2, a_{2n})_0 . B_{2n} \ldots . - (a_2, a_{2n})_{2n-2} . B_{n+1} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{a_1 . a_2 \ldots a_{2n+1}}.$$

Für diesen Fall trifft also die Regel, wie man eine folgende Bedingungsgleichung aus einer vorhergehenden findet, vollkommen mit der des §. 36. zusammen. Ist nemlich a_m durch die Gleichung $S a_m + T = 0$ gegeben, so wird die folgende $(S_1 a_m + T_1) a_{m+1} + S = 0$ sein, wo S_1, T_1 aus S, T entsteht, indem man den Index der B um eine Einheit erhöht. Soll z. B. der Ausdruck $\frac{1}{(1+x)^m} = \frac{1}{1 + m . x + \frac{m . m-1}{1 . 2} x^2 \ldots .}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, so hat man $B_1 = m$, $B_2 = \frac{m . m-1}{1 . 2}$ etc., also

$$a_1 = \frac{1}{B_1} = -\frac{1}{m},$$

$$N_2 = -a_1 B_2 - B_1 = -\frac{(m+1)}{1.2},\quad a_2 = \frac{m}{-\frac{(m+1)}{1.2}} = -\frac{2m}{m+1},$$

$$N_3 = -(a_1 a_2 B_3 + B_2 + a_2 B_2) = -\frac{m(m-1)}{2.3},\quad a_3 = \frac{-\frac{(m+1)}{1.2}}{-\frac{m(m-1)}{2.3}} = \frac{3(m+1)}{m(m-1)},$$

und man findet, dafs allgemein

$$a_{2n} = \pm \frac{2 . m . (m-1) \ldots . (m-n+1)}{(m+1)(m+2) \ldots . (m+n)},\quad a_{2n+1} = \pm \frac{(2n+1)(m+1)(m+2) \ldots . (m+n)}{m . (m-1) \ldots . (m-n)},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch aus dem in §. 39. gefundenen Kettenbruche, der den Werth von

$(1+x)^m$ angiebt, sobald man dort überall statt m den Werth $-m$ substituirt. Man vergl. auch §. 32.

44.

Will man die Reihe $1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$ in einen Kettenbruch verwandeln, der die Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ haben soll, so kann man die Werthe von a_1, a_2 .... unmittelbar auf ähnliche Weise wie in (§. 36.) finden. Leichter werden sie auf folgende Weise gefunden. Aus der angenommenen Form des Kettenbruchs folgt $\frac{1}{1+A_1x+A_2x^2\ldots.}=$ $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$. Die Werthe von a_1, a_2 .... werden also ganz dieselben sein, wie in (§. 43.), sobald man statt B überall A setzt.

Will man den Ausdruck $\frac{1}{1+B_1x+B_2x^2\ldots.}$ in einen Kettenbruch verwandeln, der die Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ haben soll, so ist $1+B_1x+B_2x^2\ldots.=F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$. Die gesuchten Gröfsen würden also auf dieselbe Weise wie in §. 36. ff. gefunden.

Soll dagegen der Ausdruck $\frac{1+A_1x+A_2x^2+\ldots.}{1+B_1x+B_2x^2+\ldots.}$ in einen Kettenbruch $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ verwandelt werden, so könnte man statt dessen $\frac{1+B_1x+B_2x^2+\ldots.}{1+A_1x+A_2x^2+\ldots.}=F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ setzen. Die Aufgabe ist alsdann auf die des (§. 40.) zurückgeführt, und man kann die dort gefundenen Werthe unmittelbar anwenden, wenn man A und B überall vertauscht.

45.

Es möge noch der Fall hervorgehoben werden, wenn die Reihe

$$1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden soll, der die Form

$$F[1+x:(a_1+x)+x:(a_2+x)+\ldots.]$$

hat. Aus dieser Annahme folgt sogleich

$$A_1+A_2x+A_3x^2\ldots.=F[1:(a_1+x)+x:(a_2+x)+\ldots.].$$

Man setze $x+\frac{x}{a_2+x+\text{ etc.}}=P$, so hat man $(A_1+A_2x+\ldots.)(a_1+P)=1$, und daher

$$A_1a_1-1=0 \text{ oder } a_1=\frac{1}{A_1}.$$

Ferner sei $P=x+\frac{x}{a_2+P_1}$, so hat man

$$\left(a_1+x+\frac{x}{a_2+P_1}\right)(A_2x+A_3x^2\ldots.)+A_1\left(x+\frac{x}{a_2+P_1}\right)=0,$$

oder

(A.) $A_1(a_2+P_1+1)+(A_2+A_3x+\ldots.)[(a_1+x)(a_2+P_1)+x]=0=$
$(a_2+P_1)[(A_1+A_2a_1)+(A_2+A_3a_1)x+(A_3+A_4a_1)x^2\ldots.]+A_1+A_2x+A_3x^2\ldots.$

Hieraus folgt $A_1a_2+a_1A_2a_2+A_1=0$, oder $a_2=-\frac{A_1}{A_1+A_2a_1}$.

Man findet allgemein jede Bedingungsgleichung aus der vorhergehenden auf folgende Weise: Ist a_m durch die Gleichung $Qa_m+q=0$ gegeben, so wird a_{m+1} durch die Gleichung $(Q_1a_m+q_1+Q)a_{m+1}+Q=0$ bestimmt, wo Q_1, q_1 wieder die Werthe bedeuten, die man aus Q, q, erhält, indem man den Index der A um eine Einheit erhöht. Denn angenommen, es entstünde die Gleichung Qa_m+q aus der Gleichung

(1.) $(a_m+P_{m-1})(Q+Q_1x+Q_2x^2+\ldots.)+q+q_1x+q_2x^2\ldots.=0$,

wo

$$P_{m-1}=x+\frac{x}{a_{m+1}+x+\frac{x}{a_{m+2}+x\text{ etc.}}}=x+\frac{x}{a_{m+1}+P_m}$$

ist, so hätte man

$$a_m(Q_1+Q_2x+\ldots.)+\left(1+\frac{1}{a_{m+1}+P_m}\right)(Q+Q_1x+Q_2x^2\ldots.)+q_1+q_2x\ldots.=0,$$

oder

$$(a_{m+1}+P_m)(a_mQ_1+q_1+Q)+(a_{m+1}+P_m)a_m(Q_2x+Q_3x^2\ldots.)+$$
$$(a_{m+1}+P_m)(Q_1x+Q_2x^2\ldots)+Q+Q_1x+Q_2x^2\ldots.+(a_{m+1}+P_m)(q_2x+q_3x^2+\ldots),$$

woraus $a_{m+1}(a_mQ_1+q_1+Q)+Q=0$ folgt. Da aber die Gleichung (1.) wirklich richtig ist, wenn $m=2$ ist, wie die Gleichung (A.) zeigt, so gilt das angegebene Bildungsgesetz der Bedingungsgleichungen für alle folgende Werthe von m. Man sieht, dafs auch hier der Nenner des Bruches, durch welchen irgend ein Theilnenner a_m bestimmt wird, der Zähler des Bruches ist, durch welchen a_{m+1} bestimmt wird.

Man sieht, dafs hier die Berechnung der Theilnenner verwickelter wird, als bei den früher (§. 36., §. 44.) betrachteten Formen, und ich übergehe daher genauere Erörterungen, die sich leicht aus dem Vorhergehenden ergeben, da ohnehin nicht leicht das Bedürfnifs entstehen wird, Reihen in Kettenbrüche von der hier angenommenen Form zu verwandeln.

46.

Folgende Bemerkungen über die zweite Methode §. 36.—45. mögen hier noch Platz finden. Es ist aus der Darstellung ersichtlich, dafs die Theilnenner a_1, a_2, ... durch die Reihencoefficienten A_1, A_2, ... vollkommen bestimmt sind. Einer jeden Reihe $1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$

entspricht also nur **ein** Kettenbruch von angegebener Form, d. h. zwei nicht identische Kettenbrüche, welche beide in einer und derselben der §. 36., §. 44., §. 45., angegebenen Formen enthalten sind, können nicht aus derselben Reihe entstanden sein. Was man also auch für eine, von den früher gegebenen abweichende Methode anwendet, eine Reihe $1+A_1x+A_2x^2\ldots\ldots$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, immer wird dieser Kettenbruch, sobald er in einer der angegebenen Formen enthalten ist, oder darauf zurückgeführt werden kann, mit dem, nach der angegebenen Methoden berechneten zusammenfallen. Wäre die Reihe $1+Ax^m+A_1x^2+\ldots\ldots$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so würde man sie sogleich auf die frühere Form zurückbringen, indem man $x^m=y$ setzte. Die Theilzähler würden also in diesem Falle nicht mehr x sondern x^m sein. Auch zusammengesetztere Reihen würde man, wie die Analysis lehrt, auf die Form $1+A_1x+A_2x^2\ldots\ldots$ zurückbringen, und daher nach der angegebenen Methode in einen Kettenbruch verwandeln können.

Es darf nicht übersehen werden, daſs diese Methode noch einer weitere Ausbildung bedarf*). Die allgemeinen Ausdrücke für die Theilnenner, welche in den berechneten Beispielen (§. 39., §. 42., § 43.,) gegeben wurden, sind dort nicht durch einen strengen Beweis, sondern vielmehr durch Induction gefunden worden. In allen ähnlichen Fällen, wo die Reihencoefficienten nach einem gewissen Gesetze gebildet sind, wird sich auch ein solches für die Theilnenner der entsprechenden Kettenbrüche angeben lassen. Die vorhergehenden Betrachtungen bieten aber unmittelbar kein Mittel dar, diese allgemeinen Ausdrücke zu finden und zugleich ihre Richtigkeit zu beweisen. Hierzu scheint es vielmehr nothwendig zu sein, einen einfachen Ausdruck zu finden, welcher jeden Theilnenner a_m (oder jedes N_m, N_{m+1}) unmittelbar aus den Reihencoefficienten A_1, A_2.... finden lehrt. Der Verfasser hat sich vergebens bemüht, die Lösung dieser Aufgabe zu finden, vielleicht aber können die mitgetheilten Ausdrücke für N_m, N_{m+1}, welche wohl noch nirgendwo angegeben sind, darauf führen. Allerdings kann man einen solchen Beweis in vielen Fällen durch andere, im folgenden Abschnitt erläuterte Mittel finden, aber sie sind indi-

*) Diese Bemerkung gilt auch von anderen ähnlichen Methoden, welche man bei anderen Schriftstellern findet. Man vergleiche namentlich *Mém. de l'ac. de Pétersb. T. 1. pag. 156. ff., pag. 226. ff., T. 7. pag. 139. ff.* In letzterem Aufsatze sind die allgemeinen Ausdrücke für die Theilnenner keinesweges bewiesen.

rect und beruhen auf Betrachtung einzelner Reihen; daher ist die Ausbildung einer allgemeineren Methode sehr wünschenswerth.

47.

Man braucht die in den vorhergehenden §§. enthaltenen Formeln nur umzukehren, d. h. man braucht nur $a_1, a_2, \ldots$ als bekannte, $A_1, A_2, \ldots$ als unbekannte Gröſsen zu betrachten, um sogleich eine Methode, Kettenbrüche in Reihen zu verwandeln, zu erhalten. Aus der Formel

$$a_m = -\frac{(a_1, a_{m-2})_0 A_{m-1} + (a_1, a_{m-2})_2 A_{m-2} + \ldots}{(a_1, a_{m-1})_0 A_m + (a_1, a_{m-1})_2 A_{m-1} + \ldots} \ldots\ldots (\S.\ 38.)$$

folgt

$$(a_1, a_m)_0 A_m +$$
$$[a_m(a_1, a_{m-1})_2 + (a_1, a_{m-2})_0] A_{m-1} + [a_m(a_1, a_{m-1})_4 + (a_1, a_{m-2})_2] A_{m-2} + \ldots = 0.$$

Da aber allgemein $(a_1, a_m)_n = a_m(a_1, a_{m-1})_n + (a_1, a_{m-2})_{n-2}$ ist, so geht die obige Gleichung in folgende über:

$$(a_1, a_m)_0 A_m + (a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} + \ldots = 0$$

oder

$$1. \quad A_m = -\frac{(a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} + \ldots}{(a_1, a_m)_0}.$$

Ist also ein Kettenbruch $F(1 + x : a_1 + x : a_2 + \ldots)$ gegeben, der in eine Reihe $1 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots$ verwandelt werden soll, so zeigt die vorstehende Formel, wie man jeden Coefficienten A_m der Reihe finden kann. Man bemerke noch Folgendes. Sind A_{m-2}, A_{m-1} durch die Bedingungsgleichungen

$$(a_1, a_{m-2})_0 A_{m-2} + q = 0,$$
$$(a_1, a_{m-1})_0 A_{m-1} + Q = 0$$

gegeben, so findet man A_m durch die Gleichung

$$2. \quad a_m . [(a_1, a_{m-1})_0 A_m + Q_1] + (a_1, a_{m-2}) A_{m-1} + q_1 = 0,$$

oder

$$(a_1, a_m)_0 A_m = -(a_m . Q_1 + (a_1, a_{m-2}) A_{m-1} + q_1),$$

wo Q_1, q_1 die Werthe bedeuten, die man aus Q, q erhält, indem man den Index der A um eine Einheit erhöht. Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, daſs die Bedingungsgleichungen dieselben, nur anders geordnet, sind, wie in §. 36., also auch auf dieselbe Weise gebildet werden. Ist aber $q . a_{m-1} + r = 0$, so ist auch $a_m(q_1 a_{m-1} + r_1) + q = 0 = Q a_m + q$ und $(Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = (Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + q_1 a_{m-1} + r_1 = 0$, wenn q_1, r_1 die Werthe bedeuten, die man aus q, r erhält, indem man den Index der A

um eine Einheit erhöht. Hieraus ergiebt sich die Wahrheit der Gleichung (2.) von selbst.

Wollte man den Kettenbruch $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ nach §. 28. in eine Reihe verwandeln, so hätte man $b_1=b_2=b_3\ldots.=x$, und es wäre der zu x^m gehörende Coefficient $A_m=\pm\frac{1}{a_1,\, a_{m-1}\,.\,a_1,\, a_m}$. Die resultirende Reihe ist daher auch von der verschieden, die aus dem zuletzt gezeigten Verfahren entsteht.

Soll ein Kettenbruch von der Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ in eine Reihe $1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$ verwandelt werden, so findet man die erforderlichen Formeln aus §. 44. (oder §. 43.). Die Berechnung wird aber bequemer ausfallen, wenn man einen solchen Kettenbruch in einen anderen $F(1:1+1:b_2+1:b_3)$ verwandelt (§. 25.). Setzt man $b_1=1$, so kann man diesen letzteren Kettenbruch so ansehen, als sei er, durch Hinweglassung der ersten Einheit aus $F(1+1:b_1+1:b_2+\ldots..)$ enstanden, und ihn daher unmittelbar nach dem vorhergehenden in eine Reihe auflösen, indem man $x=1$ setzt.

Hieran knüpft sich zugleich die Bemerkung, dafs man überhaupt alle Kettenbrüche nach der in diesem §. gezeigten Methode in Reihen auflösen kann, weil man sie immer unter die Form $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ bringen kann, indem man $x=1$ setzt.

Es sei z. B. der Kettenbruch $F(1:1+1:3+4:5+9:7\ldots.)$ gegeben, welcher durch ${}_1\overset{m}{-}{}_{\infty}F(1:1+m^2:2m+1)$ angedeutet werden kann. Statt dessen kann man

$$F\left(1:1+1:3+1:\frac{5}{4}+1:\frac{4.7}{9}+1:\frac{9.9}{8.8}\ldots.\right)$$

schreiben. Man hat daher $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=\frac{5}{4}$, $a_4=\frac{4.7}{9}$, also (nach Formel 1.):

$$A_1=\quad\frac{1}{a_1}=1,$$

$$A_2=-\frac{A_1}{a_1a_2}=-\tfrac{1}{3},$$

$$A_3=-\frac{(a_1+a_3)A_2}{a_1a_2a_3}=\tfrac{1}{5},$$

$$A_4=-\frac{(a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4)A_3+A_2}{a_1a_2a_3a_4}=-\tfrac{1}{7}.$$

Setzt man die Arbeit fort, so findet man die Reihe

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}\ldots.$$

also $_{1}\overset{m}{=}_{\infty}F(1:1+m^2;2m+1)=\frac{\pi}{4}$ *).

B. Ableitung der Kettenbrüche aus gewissen Reihen.

48.

Schon in §. 2. wurde gezeigt, wie man Kettenbrüche aus gewissen Gröfsen $A, B, C, D, \ldots$, von welchen je drei auf einander folgende einen gewissen Zusammenhang haben, ableiten kann. Hat man also gewisse, nach Potenzen von x fortschreitende Reihen, welche mit anderen ähnlich gebildeten in einem solchen Zusammenhange stehen, so kann man daraus sogleich einen Kettenbruch ableiten. Das einfachste Beispiel dieser Art bietet die allgemeine Gleichung des 2ten Grades dar. Aus der Gleichung $c=ax+bx^2$ folgt $cx=ax^2+bx^3$, $cx^2=ax^3+bx^4$, $cx^3=ax^4+bx^5\ldots$. Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen des §. 2., so findet man

$$c=A,\ x=B,\ x^2=C,\ x^3=D,\ x^4=E\ldots.$$

$$a=a,\ b=b,\ \frac{a}{c}=a_1=a_2=a_3\ldots.\ \frac{b}{c}=b_1=b_2=b_3\ldots,$$

folglich

$$\frac{c}{x}=a+\cfrac{b}{\cfrac{a}{c}+\cfrac{\frac{b}{c}}{\cfrac{a}{c}+\cfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}\text{ etc.}}}}\quad=a+\cfrac{bc}{a+\cfrac{bc}{a+\text{ etc.}}}$$

oder

$$x=F(c:a+bc:a+bc:a\ldots.)$$

Schon hieraus sieht man, dafs die Wurzel jeder quadratischen Gleichung durch einen Kettenbruch ausgedrückt werden kann. Dieser Gegenstand wird jedoch später genauer erörtert werden. Unter den Reihen aber, aus welchen Kettenbrüche auf solche Weise abgeleitet werden können, ist besonders diejenige merkwürdig, welche zuerst Gaufs zu diesem Zwecke angewandt hat **).

---

*) Dieser Ausdruck wird später noch auf andere Weise gefunden werden.
**) *Comm. soc. Gotting. rec. T. II. ad a.* 1812.

Es sei

$$(A.)\quad \varphi(a,b,c,x)=1+\frac{ab}{c}x+\frac{a.a+1.b.b+1}{1.2.c.c+1}x^2+\frac{a.a+1.a+2.b.b+1.b+2}{1.2.3.c.c+1.c+2}\ldots.$$

gegeben. Die Buchstaben a und b können ohne Änderung des Werthes der Reihe vertauscht werden, also ist $\varphi(a,b,c,x)=\varphi(b,a,c,x)$.

Setzt man $b+1$ statt b, $c+1$ statt c, so findet man

$$\varphi(a,b+1,c+1,x)=1+\frac{a.b+1}{c+1}x+\frac{a.a+1.b+1.b+2}{1.2.c+1.c+2}x^2+\frac{a.a+1.a+2.b+1.b+2.b+3}{1.2.3.c+1.c+2.c+3}x^3\ldots$$

und wenn man die Glieder, die gleich hohe Potenzen von x enthalten, mit einander verbindet, so findet man

$$\varphi(a,b+1,c+1,x)-\varphi(a,b,c,x)=\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x\left[1+\frac{a+1.b+1}{c+2}x+\frac{a+1.a+2.b+1.b+2}{1.2.c+2.c+3}\ldots\right],$$

oder

$$\varphi(a,b+1,c+1,x)-\varphi(a,b,c,x)=\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x\,\varphi(a+1,b+1,c+2).$$

Hieraus folgt,

$$1.\quad \frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}=\frac{1}{1-\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x.\frac{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}{\varphi(a,b+1,c+1,x)}}.$$

Setzt man in Gleichung (1.) $b+1$ statt a, a statt b und $c+1$ statt c, so findet man

$$\frac{\varphi(b+1,a+1,c+2,x)}{\varphi(b+1,a,c+1,x)}=\frac{1}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(b+2,a+1,c+3,x)}{\varphi(b+1,a+1,c+2,x)}}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3,x)}{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}},$$

oder

$$\frac{\varphi(a+1,b+1,c+2)}{\varphi(a,b+1,c+1,x)}=\frac{1}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3)}{\varphi(a+1,b+1,c+2)}}.$$

und wenn man diesen Werth in Gleichung (1.) substituirt:

$$2.\quad \frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3,x)}{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}}}.$$

Substituirt man hier $a+1$ statt a, $b+1$ statt b, $c+2$ statt c, so findet man

$$\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3,x)}{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a+1}{c+2}.\frac{c+1-b}{c+3}x}{1-\frac{b+2.c-a+2}{c+3.c+4}x.\frac{\varphi(a+2,b+3,c+5,x)}{\varphi(a+2,b+2,c+4,x)}}}.$$

Diesen Werth kann man wieder in Gleichung (2.) substituiren, und fährt man auf diese Weise fort, so entwickelt sich $\frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}$ in einen Kettenbruch, dessen Theilnenner alle $=1$ sind, dessen Theilzähler abwechselnd $=-\frac{(a+m).(c+m-b)}{(c+2m).(c+2m-1)}x$ und $-\frac{(b+m+1)(c+m-a+1)}{(c+2m+1)(c+2m+2)}x$ sind, wo für m nacheinander die Werthe 0, 1, 2, 3 .... gesetzt werden müssen (den ersten Theilzähler ausgenommen, der $=1$ ist). Man hat also

$$3.\quad \frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}$$

$$= {}_{0-x}^{\;m}F\left[1:1-\frac{(a+m)(c+m-b)}{(c+2m)(c+2m+1)}.x:1-\frac{(b+m+1)(c+m-a+1)}{(c+2m+1)(c+2m+2)}x:1\right].$$

Setzt man $b=0$, so wird $\Phi(a,b,c,x)=1$, und man erhält in diesem Falle aus Gleichung (3.), indem man zugleich $c-1$ statt c setzt:

$$4.\quad \Phi(a,1,c,x) = {}_{0-x}^{\;m}F\left[1:1-\frac{a+m.c+m-1}{c+2m-1.c+2m}x:1-\frac{m+1.c+m-a}{c+2m.c+2m-1}x:1\right].$$

Jede Reihe, die in der Form $\Phi(a,1,c,x)$ enthalten ist, kann daher sogleich in einen Kettenbruch verwandelt werden. Gaufs hat gezeigt, dafs die wichtigsten, in der Analysis vorkommenden Reihen in dieser Form enthalten sind.

Ist z. B. $a=1$, $c=2$, $x=-y$, so ist

$$\Phi(a,1,c,x) = 1-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{3}y^2-\tfrac{1}{4}y^3\ldots.,$$

und daher

$$\log(1+y) = y\Phi(1,1,2,-y) = y.F\left[1:1+\frac{1.1}{1.2}y:1+\frac{1.1}{2.3}y:1+\frac{2.2}{3.4}y:1+\frac{2.2}{4.5}y:1\ \text{etc.}\right]$$

$$= y.{}_{0-x}^{\;m}F\left[1:1-\frac{1+m.1+m}{1+2m.2+2m}y:1-\frac{1+m.1+m}{2+2m.3+2m}y:1\right]$$

$$= y.{}_{0-x}^{\;m}F\left[1:1-\frac{1+m}{2(1+2m)}y-\frac{1+m}{2(3+2m)}y:1\right].$$

Es ist $t=\text{tang}\,t(1-\frac{1}{3}\text{tang}^2t+\frac{1}{5}\text{tang}^3t-\frac{1}{7}\text{tang}^6.t\ldots.)$. Setzt man daher $a=\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{2}$, $x=-\text{tang}^2t$, so ist $t=\text{tang}\,t.\Phi(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-\text{tang}^2t)=$ $\text{tang}\,t.{}_{0-x}^{\;m}F\left[1:1+\frac{\frac{1}{2}+m.\frac{1}{2}+m}{\frac{1}{2}+2m.\frac{3}{2}+2m}\text{tang}^2t:1+\frac{1+m.1+m}{\frac{3}{2}+2m.\frac{5}{2}+2m}.\text{tang}^2t:1\right]$, also

$$t=\text{tang}\,t\,F\left(1:1+\frac{\frac{1^2}{4}}{\frac{1.3}{4}}\text{tang}^2t:1+\frac{1^2}{\frac{3.5}{4}}\text{tang}^2t:1+\frac{\frac{3^2}{4}}{\frac{5.7}{4}}\text{tang}^2t:1+\frac{2^2}{\frac{7.9}{4}}\text{tang}^2t:1\ldots.\right),$$

woraus man nach gehöriger Reduction

$$t=\text{tang}\,t\,F[1:1+\text{tang}^2t:3+2^2\text{tang}^2t:5+3^2\text{tang}^2t:7\ldots.]$$

findet, was man kürzer durch $t = \operatorname{tang} t \, {}_{1=\infty}^{m} F[1:1+m^2.\operatorname{tang}^2 t:2m+1]$ andeuten kann.

Diese und die übrigen Kettenbrüche, welche Gaufs aus der Gleichung (4.) entwickelt hat, sind in der Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ enthalten, oder können doch auf dieselbe zurückgeführt werden; sie müssen daher (§. 46.) mit denjenigen übereinstimmen, die man nach der Methode des §. 44. erhält. Man kann aber mit Hülfe derselben Prinzipien $\varphi(a, 1, c, x)$ auch in einen Kettenbruch verwandeln, der der Form $(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ entspricht, und also mit denjenigen übereinstimmen mufs, die man nach §. 36. erhält.

Man findet nemlich auf ähnliche Weise, wie die Gleichung (1.) gefunden wurde: $\varphi(a+1, b-1, c, x) - \varphi(a, b, c, x) = \frac{b-a-1}{c} x.\varphi(a+1, b, c+1, x)$ und

$$5. \quad \frac{(a, b, c, x)}{\varphi(a+1, b-1, c, x)} = 1 - \frac{b-a-1}{c} x . \frac{\varphi(a+1, b, c+1, x)}{\varphi(a+1, b-1, c, x)}.$$

Setzt man aber in Gleichung (3.), $a+1$ statt a, $b-1$ statt b, so findet man

$$\frac{\varphi(a+1, b, c+1, x)}{\varphi(a+1, b-1, c, x)}$$

$$= {}_{0=\infty}^{m} F\left[1:1-\frac{(a+1+m).(c+m-b+1)}{(c+2m).(c+2m+1)} x:1-\frac{(b+m).(c+m-a)}{(c+2m+1).(c+2m+2)} x:1\right],$$

und wenn man diesen Werth in Gleichung (5.) substituirt:

$$6. \quad \frac{\varphi(a, b, c, x)}{\varphi(a+1, b-1, c, x)} =$$

$${}_{0=\infty}^{m} F\left[1-\frac{b-a-1}{c} x:1-\frac{(a+1+m).(c+m-b+1)}{(c+2m).(c+2m+1)} x:1-\frac{(b+m).(c+m-a)}{(c+2m+1).(c+2m+2)} x:1\right].$$

Nimmt man $b=1$, so ist $\varphi(a+1, b-1, c, x) = 0$, und daher

$$7. \quad \varphi(a, 1, c, x) =$$

$${}_{0=\infty}^{m} F\left[1+\frac{a.x}{c}:1-\frac{(a+1+m).(c+m)}{(c+2m).(c+2m+1)} x:1-\frac{(m+1).(c+m-a)}{(c+2m+1).(c+2m+2)} x:1\right].$$

Die Gleichheit der Ausdrücke (4.) und (7.) bildet wieder eine sehr merkwürdige Beziehung zwischen Kettenbrüchen.

Setzt man wieder $a=1$, $c=2$, $x=-y$, so giebt die Gleich. (7.):

$$\log(1+y) = yF\left[1-\frac{1}{2}y:1+\frac{2.2}{2.3}y:1+\frac{1.1}{3.4}y:1+\frac{3.3}{4.5}y:1+\frac{2.2}{5.6}y:1\ldots.\right]$$

$$= yF\left[1-y:2+y:\frac{3}{2^2}+y:2.2^3\ldots.\right],$$

wie schon §. 39. gefunden wurde.

Es ist wegen einer folgenden Betrachtung wichtig, den Werth von $\tang t$ in einem Kettenbruche ausgedrückt zu haben, welcher daher noch aus dem Vorhergehenden abgeleitet werden soll. Will man die Reihe $\sin t = t\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} \ldots\right)$ mit der Reihe (A.) vergleichen, so findet man

$$\sin t = t\varphi\left(n, n', \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right),$$

wo $n = a$, $n' = b$ unbegränzt grofse Zahlen bedeuten, so dafs alle endlichen, welche zu denselben addirt, oder von denselben subtrahirt werden sollen, als überflüssig weggelassen werden können, und $n = n' = n + 1 = n' + 1 = n + 2 = n' + 2$ u. s. w. ist. Eben so findet man

$$\cos t = \varphi\left(n, n', \frac{1}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right),$$

also

$$\tang t = \frac{\sin t}{\cos t} = t\,\frac{\varphi\left(n, n', \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right)}{\varphi\left(n, n', \frac{1}{2}, -\frac{t}{4n.n'}\right)}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung (3.), so hat man

$$n = a,\ n' = b = b + 1,\ c = \frac{1}{2},\ x = -\frac{t^2}{4n.n'},$$

und daher

$$\tang t = t\,.\,{}_0^m\!\!{}_\infty F\left[1 : 1 + \frac{n.n_1}{\frac{(4m+1)(4m+3)}{4}} \cdot -\frac{t^2}{4n.n'} : 1 + \frac{n.n'}{\frac{4m+3.4m+5}{4}} \cdot -\frac{t^2}{4n.n'} : 1\right]$$

$$= t\,.\,{}_0^m\!\!{}_\infty F\left[1 : 1 - \frac{t^2}{(4m+1)(4m+3)} : 1 - \frac{t^2}{(4m+3)(4m+5)} : 1\right],$$

oder

$$\tang t = F\left[t : 1 - \frac{t^2}{1.3} : 1 - \frac{t^2}{3.5} : 1 - \frac{t^2}{5.7} : 1 - \frac{t^2}{7.9} : 1 \ldots\right]$$

$$= F[t : 1 - t^2 : 3 - t^2 : 5 - t^2 : 7 \ldots] = {}_1^m\!\!{}_\infty F[t : 1 - t^2 : 2m + 1].$$

Folgender Fall verdient noch eine besondere Erörterung. Man hat

$$x = \sin x\,.\cos x\,\varphi(1, 1, \tfrac{3}{2}, \sin x^2),$$

also, nach Gleichung (4.):

$$8.\quad x = F\left[\sin x\,.\cos x : 1 - \frac{1.2}{1.3}\sin x^2 : 1 - \frac{1.2}{3.5}\sin x^2 : 1 \ldots\right],$$

und aus Gleichung (7.) findet man

$$9.\quad x = F\left[\sin x\,.\cos x + \sin x\,.\cos x\,.\frac{1.2}{1.3}\sin x^2 : 1 - \frac{2.2}{1.5}\sin x^2 : 1 - \frac{1.2}{5.7}\sin x^2 : 1 \ldots\right].$$

Ist $\sin x = 0$, so ist auch $x = 0$, und daher auch die beiden Kettenbrüche (8.) und (9.) nothwendig $= 0$; ist dagegen $\cos x = 0$, so ist $\sin x = 1$ und

$x = \frac{\pi}{2}$, was auch der Werth der beiden Kettenbrüche sein muſs. Da sich aber in diesem Falle der Ausdruck (8.) in *) $F\left[0 : 1 - \frac{2.2}{1.5} : 1 - \frac{1.2}{3.5} : 1 \ldots\right]$ und der Ausdruck (9.) in $F\left[0 + 0 : 1 - \frac{2.2}{1.5} : 1 - \frac{1.2}{5.7} : 1 \ldots\right]$ verwandelt, so müssen diese beiden Kettenbrüche nothwendig die Form $\frac{0}{0}$ haben, d. h. es muſs $F\left[1 - \frac{1.2}{1.3} : - \frac{1.2}{3.5} : 1 \ldots\right] = 0$, und auch $F\left[1 - \frac{2.2}{1.5} : 1 - \frac{1.2}{5.7} : 1 \ldots\right] = 0$ sein, oder allgemeiner, es muſs

$$\overset{m}{\underset{0-\infty}{}}F\left[1 - \frac{(1+m).(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{1}{2}+2m).(\frac{3}{2}+2m)} : 1 - \frac{(1+m).(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{3}{2}+2m).(\frac{5}{2}+2m)} : 1\right] = 0$$

sein (nach Gleich. 4.), und

$$\overset{m}{\underset{0-\infty}{}}F\left[1 - \frac{(2+m)(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{1}{2}+2m)(\frac{5}{2}+2m)} : - \frac{(1+m)(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{5}{2}+2m)(\frac{7}{2}+2m)} : 1\right] = 0 \text{ sein.}$$

Aus diesen Bemerkungen lieſsen sich eine Menge einzelner Sätze ableiten.

$$\text{Aus } 1 - \cfrac{1.2}{1.3 - \cfrac{\ }{1 - \cfrac{1.2}{3.5 - \cfrac{\ }{1 - \cfrac{3.4}{5.7 - \cfrac{\ }{1 \text{ etc.}}}}}}} = 0 \text{ folgt } 1 = \cfrac{1.2}{1.3 - \cfrac{\ }{1 - \cfrac{1.2}{3.5 - \cfrac{\ }{1 - \cfrac{3.4}{5.7 - \cfrac{\ }{1 \text{ etc.}}}}}}} = \cfrac{1.2}{3 - \cfrac{1.2}{5 - \cfrac{3.4}{7 \text{ etc.}}}}$$

$$\text{also } 3 - \cfrac{1.2}{5 - \cfrac{3.4}{7 - \cfrac{3.4}{9 \text{ etc.}}}} = 1.2, \text{ folglich } 1 - \cfrac{1.2}{5 - \cfrac{3.4}{7 - \cfrac{3.4}{9 \text{ etc.}}}} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Aehnliche Resultate lieſsen sich auch aus $F\left[1 - \frac{2.2}{1.5} : 1 - \frac{1.2}{5.7} : 1 \ldots\right] = 0$ ableiten.

Über die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche kann man auſser den angeführten Schriften noch folgende nachsehen:

Nouv. mém. de l'acad. de Berlin 1776. *pag.* 236 ff., und 1794. *pag.* 126.

Nova acta acad. Petr. 1784. *pag.* 36 ff.

Lambert Beiträge zum Gebrauch der Mathem. Thl. II. S. 54 ff.

Annales de mathém. par **Gergonne**. *T. IX.*

*) Diese Kettenbrüche dienen als Beweis der in §. 22. aufgestellten Behauptung.

Drittes Kapitel.

A. Verwandelung der unendlichen Producte in Kettenbrüche.

49.

Unter unendlichen Producten werden hier Brüche verstanden, deren Zähler und Nenner das Product einer unendlichen Anzahl von Factoren sind. Die Methode, solche Ausdrücke in Kettenbrüche zu verwandeln, welche im Folgenden gezeigt werden soll, beruht auf der Eigenschaft dieser Producte, sich in Reihen verwandeln zu lassen, welche Letztere wieder in Kettenbrüche verwandelt werden können. Es seien a_1, a_2, a_3, ... a_n beliebige Ausdrücke, und man bilde aus denselben das Product $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots\ldots(1+a_n)$, welches durch das Zeichen $(1+a_1|n)$ angedeutet werden soll, so hat man

$$(1+a_1|2) = (1+a_1)(1+a_2) = 1+a_1+a_2(1+a_1|1).$$

Hieraus folgt

$$(1+a_1|3) = (1+a_3)(1+a_1|2) = 1+a_1+a_2(1+a_1|1)+a_3(1+a\,|2),$$

und wenn man auf diese Weise fortführt, so erhält man

1. $(1+a_1|n) = 1+a_1+a_2(1+a_1|1)+a_3(1+a_1|2)+\ldots\ldots+a_n(1+a_1|n-1)$.

Auf ähnliche Weise kann auch der Ausdruck

$$\frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = \frac{(1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_n)}{(1+b_1)(1+b_2)\ldots\ldots(1+b_n)}$$

entwickelt werden. Man setze

$$\frac{1+a_1}{1+b_1} = 1+c_1;\quad \frac{1+a_2}{1+b_2} = 1+c_2;\ \ldots\ldots \frac{1+a_n}{1+b_n} = 1+c_n,$$

so erhält man aus der Formel (1.):

$$\frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = (1+c_1|n) = 1+c_1+c_2(1+c_1|1)+c_3(1+c_1|2)+\ldots\ldots+c_n(1+c_1|n-1),$$

oder, wenn man für c_1, c_2, c_3 .... c_n die Werthe $\frac{a_1-b_1}{1+b_1}$, $\frac{a_2-b_2}{1+b_2}$, $\frac{a_3-b_3}{1+b_3}$, ... $\frac{a_n-b_n}{1+b_n}$ substituirt:

2. $\frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = 1+\frac{a_1-b_1}{1+b_1}+\frac{a_2-b_2}{1+b_2}\cdot\frac{(1+a_1|1)}{(1+b_1|1)}+\ldots\ldots+\frac{a_n-b_n}{1+b_n}\cdot\frac{(1+a_1|n-1)}{(1+b_1|n-1)}$.

Setzt man zur Abkürzung

$$1+a_1 = d_1,\quad 1+a_2 = d_2,\ \ldots\ldots\ 1+a_n = d_n,$$
$$1+b_1 = e_1,\quad 1+b_2 = e_2,\ \ldots\ldots\ 1+b_n = e_n,$$

so hat man *)

$$3.\quad \frac{d_1.d_2.d_3\ldots.d_n}{e_1.e_2.e_3\ldots.e_n}=1+\frac{d_1-e_1}{e_1}+\frac{d_2-e_2}{e_2}.\frac{d_1}{e_1}+\frac{d_3-e_3}{e_3}.\frac{d_1.d_2}{e_1.e_2}+\ldots.\frac{d_n-e_n}{e_n}.\frac{d_1\,d_2\ldots.d_{n-1}}{e_1.e_2\ldots.e_{n-1}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Reihe $1+\frac{A_1}{\alpha_1}x^h+\frac{A_2}{\alpha_2}x^{2h}+\frac{A_3}{\alpha_3}x^{3h}\ldots.$ und setzt $x=1$, so hat man

$$d_1-e_1=A_1\quad (d_2-e_2)d_1=A_2\quad (d_3-e_3)d_1.d_2=A_3\ \ldots.\ (d_n-e_n)d_1\,d_2\ldots.d_n=A_n,$$
$$e_1=\alpha_1\qquad e_1.e_2=\alpha_2\qquad e_1.e_2.e_3=\alpha_3\ldots.\ e_1.e_2\ldots\ldots e_{n-1}=\alpha_n,$$

folglich (§. 31.)

$$\frac{d_1.d_2.d_3\ldots.d_n}{e_1.e_2.e_3\ldots.e_n}=1+\cfrac{d_1-e_1}{e_1-\cfrac{(d_2-e_2)d_1.e_1^2}{(d_1-e_1)e_1.e_2+(d_2-e_2)d_1.e_1-\cfrac{(d_1-e_1)(d_3-e_3)d_1.d_2.e_2^2\,e_1^2}{(d_2-e_2)d_1.e_1.e_2.e_3+(d_3-e_3)d_1.d_2.e_1.e_2\ \text{etc.}}}}$$

Dieser Ausdruck kann aber noch sehr abgekürzt werden, indem man die sich aufhebenden Glieder und die überflüssigen Factoren wegläfst, und zwar findet man nach vorgenommener Reduction:

$$\frac{d_1.d_2\ldots.d_n}{e_1.e_2\ldots.e_n}=1+\cfrac{d_1-e_1}{e_1-\cfrac{(d_2-e_2)d_1.e_1}{d_1.d_2-e_1.e_2-\cfrac{(d_1-e_1)(d_3-e_3)d_2.e_2}{d_2.d_3-e_2.e_3-\cfrac{(d_2-e_2)(d_4-e_4)d_3.e_3}{d_3.d_4-e_3.e_4\ \text{etc.}}}}}$$

Da die Bildung der Ausdrücke d_1, d_2, d_3, ... e_1, e_2, e_3, ... durch keine Voraussetzung beschränkt ist, so kann man also jedes beliebige unendliche Product, mit Hülfe dieser Formel, in einen Kettenbruch verwandeln.

Will man diese Formel in einen allgemeinen Ausdruck zusammenfassen, so hat man

$$4.\quad \frac{d_1.d_2\ldots.d_n}{e_1.e_2\ldots.e_n}={}_{1-\infty}^{\ m}F\left(1+\cfrac{d_1-e_1}{e_1-\cfrac{(d_{m-1}-e_{m-1})(d_{m+1}-e_{m+1})d_m.e_m}{d_m.d_{m+1}-e_m.e_{m+1}}}\right),$$

wo $d_0-e_0=1$ gesetzt werden mufs.

Es ist z. B.

$$\frac{\pi}{2}=\tfrac{2}{1}.\tfrac{2}{3}.\tfrac{4}{3}.\tfrac{4}{5}.\tfrac{6}{5}.\tfrac{6}{7}\ldots.$$

Setzt man

$$d_1=2,\ d_2=2,\ d_3=4,\ d_4=4,\ d_5=6,\ d_6=6,\ \ldots.$$
$$e_1=1,\ e_2=3,\ e_3=3,\ e_4=5,\ e_5=5,\ e_6=7,\ \ldots.$$

*) Schweins Analysis S. 235.

so ist

$$5.\quad \frac{\pi}{2} = F(1 + 1:1 + 1.2:1 + 2.3:1 + 3.4:1 \text{ etc.})\ *).$$

Man könnte auch $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots.}{3.1.5.3.7.5\ldots.}$ schreiben. Setzt man nun

$$d_1 = 2,\ d_2 = 2,\ d_3 = 4,\ d_4 = 4,\ d_5 = 6,\ d_6 = 6,\ldots.$$
$$e_1 = 3,\ e_2 = 1,\ e_3 = 5,\ e_4 = 3,\ e_5 = 7,\ e_6 = 5,$$

so findet man

$$6.\quad \frac{\pi}{2} = F(1 - 1:3 - 2.3:1 + 1.2:3 + 4.5:1 + 3.4:3 + 6.7:1 \text{ etc.}).$$

Würde man

$$d_1 = 2.2,\ d_2 = 4.4,\ d_3 = 6.6,\ d_4 = 8.8,\ldots.$$
$$e_1 = 1.3,\ e_2 = 3.5,\ e_3 = 5.7,\ e_4 = 7.9,\ldots.$$

setzen, so erhielte man

$$7.\quad \frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{2^2.1.3}{2^2.4^2 - 1.3^2.5 - \cfrac{4^2.3.5}{4^2.6^2 - 3.5^2.7 - \cfrac{6^2.5.7}{6^2.8^2 - 5.7^2.9 \text{ etc.,}}}}}$$

und auf ähnliche Weise könnte man noch andere Entwicklungen von $\frac{\pi}{2}$ finden. Eine andere bekannte Formel ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3.6.6.12.12.18.18.24\ldots.}{2.5.7.11.13.17.19.23\ldots.}.$$

Setzt man daher

$$d_1 = 3,\ d_2 = 6,\ d_3 = 6,\ d_4 = 12,\ldots.$$
$$e_1 = 2,\ e_2 = 5,\ e_3 = 7,\ e_4 = 11,\ldots.$$

so hat man

$$\frac{\pi}{2} = F(1 + 1:2 - 2.3:8 + 5.6:1 + 6.7:5 + 11.12:1 + 12.13:5 \text{ etc.}),$$

oder (nach §. 15.)

$$8.\quad \frac{\pi}{2} = F(1 + 1:1 + 1:1 + 2.3:2 + 5.6:1 + 6.7:5 + 11.12:1 + 12.13:5 \text{ etc.}).$$

Der Ausdruck

$$\sqrt{2} = \frac{2.2.6.6.10.10\ldots.}{1.3.5.7.\ 9.11\ldots.}$$

giebt, wenn man

$$d_1 = 2,\ d_2 = 2,\ d_3 = 6,\ d_4 = 6,\ldots.$$
$$e_1 = 1,\ e_2 = 3,\ e_3 = 5,\ e_4 = 7,\ldots.$$

setzt:

---

*) Diesen Ausdruck hat schon Euler auf anderem Wege gefunden *com. ac Petr. T.* 11. *pag.* 48.

9. $\sqrt{2} = F(1+1:1+1.2:1+2.3:3+5.6:1+6.7:3+9.10:1 \text{ etc.})$
Die Kettenbrüche (6.), (8.), (9.), bei welchen die Theilnenner abwechselnd wiederkehren, während die Theilzähler nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, sind besonders bemerkenswerth, weil sich aus keiner bisher bekannten Methode ähnliche Kettenbrüche ergeben haben; vermöge der Formel (4.) dagegen ist es leicht, eine Menge solcher Kettenbrüche zu finden. So z. B. findet Euler (*Intr. in an. inf.* §. 185.):

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4.4.8.8.12.12....}{3.5.7.9.11.13....}.$$

Hieraus erhält man

10. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = F(1+1:3+3.4:1+4.5:3+7.8:1+8.9:3+11.12:1 \text{ etc.}).$

Man bemerke, dafs es sehr leicht ist, solche Kettenbrüche, die aus unendlichen Producten abgeleitet sind, auf irgend eine Potenz zu erheben. Denn da $\left(\frac{d_1.d_2.d_3....d_n}{e_1.e_2.e_3....e_n}\right)^t = \frac{d_1^t.d_2^t.d_3^t....d_n^t}{e_1^t.e_2^t.e_3^t....e_n^t}$, so findet man aus Formel (4.), indem man statt d, e überall d^t, e^t setzt:

$$\left(\frac{d_1.d_2.d_3....d_n}{e_1.e_2.e_3....e_n}\right)^t = {}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1+\cfrac{d_1^t-e_1^t}{e_1^t-\cfrac{(d_{m-1}^t-e_{m-1}^t)(d_{m+1}^t-e_{m+1}^t)\,d_m^t.e_m^t}{d_m^t.d_{m+1}^t-e_m^t.e_{m+1}^t}}\right).$$

So z. B. giebt der Ausdruck

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{2^2.2^2.4^2.4^2.6^2.6^2....}{1^2.3^2.3^2.5^2.5^2.7^2....},$$

indem man $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, ... $e_1 = 1$, $e_2 = 3$, ... setzt:

$$\frac{\pi^2}{4} = 1+\cfrac{3}{1+\cfrac{1.5.1^2.2^2}{4^2-3^2+\cfrac{3.7.2^2.3^2}{9^2-8^2+\cfrac{5.9.3^2.4^2}{16^2-15^2 \text{ etc.}}}}}$$

B. Verwandelung der Kettenbrüche in unendliche Producte.

50.

Es werde der zu verwandelnde Kettenbruch durch die allgemeine Formel $1+\cfrac{n}{n_1-\cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{b_2}{a_2 \text{ etc.}}}}$ angedeutet, welche kürzer durch ${}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1+\cfrac{n}{n_1-\cfrac{b_m}{a_m}}\right)$ ausgedrückt werden kann. Soll nun dieser Kettenbruch in ein unendliches

Product $\frac{d_1 . d_2 . d_3 \ldots}{e_1 . e_2 . e_3 \ldots}$ verwandelt werden, so vergleiche man den Ausdruck $\underset{1-x}{\overset{m}{F}}\left(1+\frac{n}{n_1-\frac{b_m}{a_m}}\right)$ mit der Formel (4.) des §. 49., und man findet $n = d_1 - e_1$, $n_1 = e_1$, also $d_1 = n + n_1$, $e_1 = n_1$ und $\frac{d_1}{e_1} = \frac{n+n_1}{n_1}$, ferner

$$b_m = (d_{m-1} - e_{m-1})(d_{m+1} - e_{m+1})\, d_m . e_m,$$
$$a_m = d_m . d_{m+1} - e_m . e_{m+1}.$$

Hieraus findet man

$$12. \quad d_{m+1} = \frac{b_m - a_m . d_m (d_{m-1} - e_{m-1})}{(d_{m-1} - e_{m-1})\, d_m (e_m - d_m)},$$

$$13. \quad e_{m+1} = \frac{b_m - a_m . e_m (d_{m-1} - e_{m-1})}{(d_{m-1} - e_{m-1})\, e_m (e_m - d_m)} \text{ und}$$

$$14. \quad \frac{d_{m+1}}{e_{m+1}} = \frac{e_m}{d_m} . \frac{b_m - a_m . d_m (d_{m-1} - e_{m-1})}{b_m - a_m . e_m (d_{m-1} - e_{m-1})}.$$

Vermöge der Formeln (12.) und (13.) kann man also jeden Zähler und Nenner eines Factors $\frac{d_{m+1}}{e_{m+1}}$ des unendlichen Products berechnen, und zwar auf dem Wege der Recursion, indem man d_m, d_{m-1}, e_m, e_{m-1} als bekannt voraussetzt. Eigentlich aber ist es nicht sowohl wichtig, die Zähler und Nenner der Factoren einzeln, als vielmehr ihren Quotienten $\frac{d_{m+1}}{e_{m+1}}$ zu kennen. Diesen kann man aber auch durch ein independentes Verfahren, d. h. unmittelbar aus den Gliedern des Kettenbruchs finden, ohne die Zähler und Nenner der vorhergehenden Factoren zu kennen. In dieser Beziehung bemerke man Folgendes. Es ist nicht blos der ganze Kettenbruch $\underset{1-x}{\overset{m}{F}}\left(1+\frac{n}{n_1-\frac{b_m}{a_m}}\right)$ dem ganzen unendlichen Producte $\frac{d_1 . d_2 . d_3 . d_4 \ldots}{e_1 . e_2 . e_3 . e_4 \ldots}$ gleich, sondern auch jeder Theil des Kettenbruchs einem Theile des unendlichen Products, d. h. es ist $1+\frac{n}{n_1} = \frac{d_1}{e_1}$, $1+\frac{n}{n_1-\frac{b_1}{a_1}} = \frac{d_1 . d_2}{e_1 . e_2}$, $1+\frac{n}{n_1-\frac{b_1}{a_1-\frac{b_2}{a_2}}} = \frac{d_1 . d_2 . d_3 \ldots}{e_1 . e_2 . e_3 \ldots}$ u. s. w. Dies folgt unmittelbar aus Formel (3.); denn läfst man das unendliche Product irgendwo abbrechen, setzt man z. B.

$$d_4 = d_5 = d_6 = \ldots = 1,$$
$$e_4 = e_5 = e_6 = \ldots = 1,$$

so hat man

$$\frac{d_1 . d_2 . d_3}{e_1 . e_2 . e_3} = 1 + \frac{d_1 - e_1}{e_1} + \frac{d_2 - e_2}{e_2} . \frac{d_1}{e_1} + \frac{d_3 - e_3}{e_3} . \frac{d_1 . d_2}{e_1 . e_2},$$

und nach Formel (4.)

$$\frac{d_1 . d_2 . d_3}{e_1 . e_2 . e_3} = 1 + \cfrac{d_1 - e_1}{e_1 - \cfrac{(d_2 - e_2)\, d_1 . e_1}{d_1 . d_2 - e_1 . e_2 - \cfrac{(d_1 - e_1)(d_3 - e_3)\, d_2 . e_2}{d_2 . d_3 - e_2 . e_3}}} = 1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}}},$$

und auf dieselbe Weise findet man, dafs jeder andere Theil des unendlichen Products dem entsprechenden Theile des Kettenbruchs gleich ist. Zwei auf einander folgende Theile des Kettenbruchs $\overset{m}{\underset{1-r}{F}}\left(1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_m}{a_m}}\right)$, $\overset{m}{\underset{1-r+1}{F}}\left(1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_m}{a_m}}\right)$ sind also bezüglich $= \frac{d_1 . d_2 \ldots . d_{r+1}}{e_1 . e_2 \ldots . e_{r+1}}, \frac{d_1 . d_2 \ldots . d_{r+2}}{e_1 . e_2 \ldots . e_{r+2}}$, und der zweite Ausdruck durch den ersten dividirt, giebt $\frac{d_{r+2}}{e_{r+2}}$. Will man also die successiven Theile des unendlichen Products erfahren, so berechne man die successiven Theile des Kettenbruchs, dividire jeden folgenden durch den unmittelbar vorhergehenden, und die Quotienten werden das Verlangte geben.

Es soll z. B. der Kettenbruch

$$F(1 + 1:1 + 2:2 + 3:3 + 4.4 \ldots .) = \overset{m}{\underset{1-\infty}{F}}\left(1 + \frac{m}{m}\right)$$

in ein unendliches Product verwandelt werden. Hier ist

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2}} = \frac{3}{2},\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3}}} = \frac{8}{5},\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4}}}} = \frac{30}{19}, \ldots .$$

also

$$\frac{d_1}{e_1} = \frac{2}{1},\ \frac{d_2}{e_2} = \frac{1}{2} . \frac{3}{2} = \frac{3}{4},\ \frac{d_3}{e_3} = \frac{2}{3} . \frac{8}{5} = \frac{16}{15},\ \frac{d_4}{e_4} = \frac{5}{8} . \frac{30}{19} = \frac{75}{76}, \ldots .$$

Das Gesetz, nach welchem diese Factoren gebildet sind, fällt in die Augen. Es ist nemlich

$$\frac{d_1}{e_1} = \frac{2}{1},\ \frac{d_2}{e_2} = \frac{3.1}{3.1 + 1},\ \frac{d_3}{e_3} = \frac{4(3.1+1)}{4(3.1+1) - 1},\ \frac{d_4}{e_4} = \frac{5[4(3.1+1) - 1]}{5[4(3.1+1) - 1] + 1}.$$

Aus der Natur des gegebenen Kettenbruchs kann man aber leicht ableiten, dafs dieses Gesetz allgemein ist, d. h. wenn der $n$te Factor des unendlichen Products $= \frac{l}{l \pm 1}$ ist, so wird der $n+1$te Factor $= \frac{n + 2(l \pm 1)}{n + 2(l \pm 1) \mp 1}$

sein. Denn es sei *) $\frac{a}{b} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\dots+\cfrac{n-1}{n-1}}} = {}^{\;m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)$. Ist nun

${}^{\;m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{(n+1)a}{(n+1)b\pm1}$, so ist auch

$${}^{\;m}_{1-n+1}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{(n+1)(n+1)a+(n+1)a}{(n+1)[(n+1)b\pm1]+(n+1)b}\ (\text{§. 6. } B.) = \frac{(n+2)(n+1)a}{(n+2)[(n+1)b\pm1]\mp1},$$

folglich

$$\frac{d_1 \dots d_n}{e_1 \dots e_n} = \frac{{}^{\;m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right)}{{}^{\;m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)} = \frac{(n+1)b}{(n+1)b\pm1} = \frac{l}{l\pm1},$$

$$\frac{d_1 \dots d_{n+1}}{e_1 \dots e_{n+1}} = \frac{{}^{\;m}_{1-n+1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)}{{}^{\;m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right)} = \frac{(n+2)[(n+1)b\pm1]}{(n+2)[(n+1)b\pm1]\mp1} = \frac{(n+2)(l\pm1)}{(n+2)(l\pm1)\mp1}.$$

Nun ist aber wirklich

$${}^{\;m}_{1-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = 1+\frac{1}{1} = \frac{2}{1},$$

$${}^{\;m}_{1-2}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2}} = \frac{6}{4} = \frac{3.2}{3.1+1},$$

$${}^{\;m}_{1-3}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3}}} = \frac{24}{15} = \frac{4.6}{4.4-1},$$

folglich allgemein ${}^{\;m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{(n+1)a}{(n+1)b\pm1}$, wenn ${}^{\;m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{a}{b}$ ist, und das Bildungsgesetz der Factoren ist daher allgemein bewiesen.

Aus späteren Betrachtungen (§. 69.) wird sich ergeben, dafs ${}^{\;m}_{1-\infty}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{e}{e-1}$ ist; man hat daher

$$\frac{e}{e-1} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{e}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{75}{76}\cdot\frac{456}{455}\cdot\frac{3185}{3186}\cdots$$

Wollte man die Factoren nach den Formeln (12.) und (13.) berechnen, so hätte man

*) Und zwar soll $\frac{a}{b}$ den Bruch bedeuten, welcher aus der Verwandelung von ${}^{\;m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)$ in einen gewöhnlichen Bruch entsteht, ohne dafs eine fernere Reduction vorgenommen wird (vergl. §. 3.).

$$n = 1, \quad b_1 = -2, \quad b_2 = -3, \quad b_3 = -4, \quad \ldots .$$
$$n_1 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 4, \quad \ldots .$$
$$d_1 = 2, \quad d_2 = \frac{-2-2.2}{2.-1} = 3, \quad d_3 = \frac{-3-3.3}{3.-1} = 4, \quad \ldots .$$
$$e_1 = 1, \quad e_2 = \frac{-2-2}{1.-1} = 4, \quad e_3 = \frac{-3-3\,4}{4.-1} = \frac{15}{4}, \ldots .$$

woraus man wieder $\frac{d_1}{e_1} = \frac{2}{1}$, $\frac{d_2}{e_2} = \frac{3}{4}$, $\frac{d_3}{e_3} = \frac{16}{15}$, ... findet.

Es wurde früher (§. 32.) gefunden:

$$\frac{4}{\pi} = F(1+1.1:2+3.3:2+5.5:2 \text{ etc.}) = {}_0^m{}_\infty F(1+(2m+1)^2:2).$$

Soll dieser Bruch in ein unendliches Product verwandelt werden, so hat man

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 1+\frac{1.1}{2} = \frac{3}{2}, \quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2}} = \frac{15}{13}, \quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2}}} = \frac{105}{76}, \quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2}}}} = \frac{945}{789}, \ldots$$

und daher $\frac{4}{\pi} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{91}{76} \cdot \frac{684}{791} \ldots .$

Das Gesetz, nach welchem hier die Factoren gebildet werden, leuchtet ein, sobald man sie auf folgende Weise schreibt:

$$\frac{3}{2} = \frac{3.1}{3.1-1}, \quad \frac{10}{13} = \frac{5.2}{5.2+1.3}, \quad \frac{91}{76} = \frac{7.13}{7.13-1\,3.5}, \quad \frac{684}{789} = \frac{9\,76}{9.76+1.3.5.7},$$

und es ist wieder leicht, die Allgemeinheit dieses Gesetzes aus der Beschaffenheit des Kettenbruches abzuleiten, sobald man bemerkt, daſs, wenn der $m$te der Theile $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{13}$, ... $= \frac{a}{b}$ ist, alsdann der $m+1$te $= \frac{(2m+1)a}{(2m+1)b \pm a}$ ist.

51.

Die im Vorhergehenden gezeigte Verwandelung der Kettenbrüche in unendliche Producte beruht auf den Betrachtungen des §. 50. Sie kann aber auf einfacherem Wege gefunden werden. Man kann nemlich statt eines jeden Kettenbruchs $F(a, a_m)$ den Ausdruck

$$a\left(\frac{F(a,a_1)}{a} \cdot \frac{F(a,a_2)}{F(a,a_1)} \cdot \frac{F(a,a_3)}{F(a,a_2)} \cdots \cdot \frac{F(a,a_{m-1})}{F(a,a_{m-2})} \cdot \frac{F(a,a_m)}{F(a,a_{m-1})}\right)$$

setzen. Hierdurch ist also der Kettenbruch sogleich in ein Product verwandelt, und setzt man $\frac{F(a,a_1)}{a} = \frac{d_1}{e_1}$, $\frac{F(a,a_2)}{F(a,a_1)} = \frac{d_2}{e_2}$ u. s. w., so fallen diese Ausdrücke ganz mit denen des vorigen §. zusammen, nur daſs dort $a = 1$ war, welche Beschränkung nun wegfällt.

Hieraus ergiebt sich denn auch unmittelbar ein Verfahren, jedes unendliche Product $\frac{d.d_1....d_n}{e.e_1....e_n}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln. Denn man braucht nur

$$\frac{d}{e}=\frac{a}{1},\ \frac{d_1}{e_1}=\frac{F(a,a_1)}{a},\ \frac{d_2}{e_2}=\frac{F(a,a_2)}{F(a,a_1)},\ ....$$

oder

$$d=a,\quad d_1=a,a_1,\quad d_2=a_1.a,a_2,\ ....$$
$$e=1,\quad e_1=a.a_1,\quad e_2=a_1,a_2.a,a_1,\ ....$$

zu setzen, und die Werthe von a, a_1, ... b_1, b_2, ... durch d, d_1, ... e, e_1, ... zu bestimmen. Man kommt hierdurch zuletzt wieder auf Formel (4.) zurück, weshalb die genauere Entwickelung hier übergangen werden möge; nur bemerke man, dafs in Formel (4.) $d=e=1$ ist.

Da nicht blos das ganze unendliche Product dem ganzen Kettenbruch gleich ist, sondern auch jeder einzelne Theil $\frac{d.d_1}{e.e_1}$, $\frac{d.d_1.d_2}{e.e_1.e_2}$ u. s. w. bezüglich jedem einzelnen Theile $F(a,a_1)$, $F(a,a_2)$ u. s. w., so folgt hieraus, dafs jedes unendliche Product, das man auf dem angegebenen Wege in einen Kettenbruch mit blos positiven Gliedern verwandeln kann, convergirt, indem seine einzelnen Theile abwechselnd gröfser und kleiner als der wahre Werth sein, und sich demselben immer mehr nähern werden, je mehr Factoren man zu ihrer Bildung anwendet (§. 11.).

Die im vorigen §. gefundenen Entwickelungen in unendliche Producte scheinen nicht blos deswegen interessant zu sein, weil man sie noch auf keinem andern Wege erhalten hat, sondern weil man überhaupt, so viel dem Verfasser bekannt ist, bisher nur für Functionen von π unendliche, aus g a n z e n Zahlen bestehende Producte gefunden hat, keinesweges aber für Functionen von e, wie der hier gefundene Ausdruck $\frac{e}{e-1}$ ist. Da der Ausdruck einer Menge ähnlicher Functionen in Kettenbrüchen bekannt ist, so können aus demselben mit Leichtigkeit eben so viel unendliche Producte abgeleitet werden.

Viertes Capitel.

Summirung der Kettenbrüche.

52.

Die Frage nach der Summe oder dem Werthe eines gegebenen Kettenbruchs kann nur dann besondere Schwierigkeiten darbieten, wenn dieser Kettenbruch ein unendlicher ist. Die Werthe endlicher Kettenbrüche findet man durch Reduction nach §. 5., daher sind letztere von den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen. Es sollen ferner nur solche Kettenbrüche betrachtet werden, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, da alle übrigen Kettenbrüche *) auf Kettenbrüche dieser Art zurückgeführt werden können (§. 18.), und zwar wird stillschweigend angenommen, dafs die Theilnenner, den ersten etwa ausgenommen, alle positiv sind (§. 19.).

53.

Um aber Dunkelheiten und Widersprüche zu verhüten, ist es hier, wie bei den Reihen, nöthig, den Sinn des Wortes Summe und die Bedeutung des convergirenden und divergirenden Kettenbruchs genauer zu bestimmen. Es wurde früher gezeigt (§. 28.), dafs man statt eines jeden Kettenbruchs $F(a, a_m)$ auch

$$a + F(a, a_1) - a + F(a, a_2) - F(a, a_1) + \ldots + F(a, a_m) - F(a, a_{m-1})$$

schreiben kann. Setzt man zur Abkürzung

$$F(a, a_1) - a = r,\ F(a, a_2) - F(a, a_1) = r_1,\ \ldots\ F(a, a_m) - F(a, a_{m-1}) = r_{m-1},$$

so ist

$$F(a, a_m) = a + r + r_1 + r_2 + \ldots$$

Ist nun dieser Ausdruck so beschaffen, dafs er niemals über alle Gränzen hinaus wächst, so viel Glieder $r, r_1, r_2, \ldots$ man auch zu dessen Bildung anwendet, sondern im Gegentheil immer zwischen angebbaren endlichen Gränzen enthalten ist und sich einem bestimmten Werthe unbe-

*) Wofern sie aus rationalen Gröfsen gebildet sind.

gränzt nähert, so heifst der Kettenbruch ein convergenter, und dieser bestimmte Werth heifst die Summe des Kettenbruchs. Wächst aber der Ausdruck $a + r + r_1 + r_2 \ldots.$ über jede angebbare Gränze hinaus, wenn man nur eine hinlängliche Anzahl von Gliedern zu dessen Bildung anwendet, so heifst der Kettenbruch ein divergenter. In diesem Sinne hat also ein divergenter Kettenbruch keine Summe. Würde man dagegen unter Summe eines Kettenbruches nur einen Ausdruck verstehen, aus welchem sich durch gewisse Operationen dieser Kettenbruch entwickeln läfst, in welchem Sinne das Wort oft in Rücksicht auf Reihen gebraucht wird, so würde der divergirende Kettenbruch eben so wohl wie der convergirende eine Summe haben können. Ein solcher Ausdruck soll aber im Folgenden nicht die Summe, sondern die erzeugende Function des Kettenbruchs heifsen.

54.

Ein Kettenbruch $F(a, a_m) = F(a + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 \text{ etc.})$, in welchem nur positive Gröfsen vorkommen, ist immer convergent; setzt man $\frac{b_2}{F(a_2, a_m)} = M$, so ist M eine positive Gröfse, also $F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1 + M}$ und daher $F(a, a_m) \gtrless {a \atop a + \frac{b_1}{a_1}}$. Je mehr Glieder man zur Berechnung anwendet, desto näher kommt man dem wahren Werthe, und es ist leicht zu bestimmen, wie weit man in der nähernden Berechnung vorgeschritten ist (§. 11.).

Sobald ein Theil $F(a_m, a_{m+n})$ eines Kettenbruchs $F(a, a_{m+n})$ convergirt, so convergirt auch der ganze Kettenbruch. Denn es sei die Summe des Kettenbruchs $F(a_m, a_{m+n}) = M$, so kann man statt $F(a, a_{m+n})$ den endlichen Kettenbruch $F(a \pm b_1 : a_1 + \ldots \pm b_m : M)$ setzen, dessen Summe durch Reduction gefunden werden kann. Hieraus folgt, dafs wenn die ersten Theilzähler eines Kettenbruchs positiv oder negativ sind, von einer gewissen Gränze an aber nur positive Theilzähler vorkommen, der Bruch convergirt. Ein solcher Kettenbruch hat mit einer Reihe Ähnlichkeit, die anfangs wenig, dann aber schnell convergirt. Wendet man zur nähernden Berechnung nur die ersten Glieder an, so kann man sich sehr weit vom wahren Werthe entfernen. Geht man aber in der nähernden Berechnung weiter fort, so dafs man auch einen Theil des Kettenbruchs zu Hülfe nimmt, in welchem alle Theilzähler positiv sind, so wird man dem wahren Werthe desto näher kommen, je mehr Theilbrüche man zur Berech-

nung anwendet, und zwar werden alsdann die Resultate abwechselnd kleiner und gröfser als der wahre Werth sein.

55.

Sind alle Theilzähler negativ, so wird der Bruch convergiren, wenn jeder Theilnenner a_n gröfser ist als der dazu gehörende Theilzähler b_n. Denn es sei der Bruch $F(a, a_{m+n}) = F(a - b : a_1 - b_2 : a_2 - b_3 : a_3 \ldots)$ gegeben; man betrachte einen beliebigen Theil desselben:

$$F(a, a_m) = F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 \ldots - b_m : a_m).$$

Ist nun allgemein $a_n > b_n$, so ist:

$$\frac{b_m}{b_m} \substack{<1 \\ >0},\quad a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m} > a_{m-1} - 1,\quad \frac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m}} \substack{<1 \\ >0},\quad a_{m-2} - \frac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m}} > a_{m-2} - 1,$$

und führt man auf diese Weise fort, so findet man

$$a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 \text{ etc.}}} > a_1 - 1,\quad \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 \text{ etc.}}}} \substack{<1 \\ >0},$$

also $F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 \ldots) \substack{> a - 1 \\ < a}$. Der Kettenbruch ist also zwischen zwei angebbaren Gränzen eingeschlossen, d. h. er convergirt, und ist einer positiven Gröfse gleich, die zwischen $a - 1$ und a liegt. Nur in dem besonderen Falle, wenn jeder Theilnenner den dazu gehörenden Theilzähler um eine Einheit übertrifft, d. h., wenn allgemein $a_m = b_m + 1$ ist, ist der Werth des Kettenbruchs genau $a - 1$. Denn er ist alsdann =

$$F[a - b_1 : (b_1 + 1) - b_2 : (b_2 + 1) - b_3 : (b_3 + 1) \ldots],$$

nun ist

$$1 = \frac{b_1}{b_1 + 1 - 1},\quad 1 = \frac{b_2}{b_2 + 1 - 1} \text{ also } 1 = \frac{b_1}{b_1 + 1 - \frac{b_2}{b_2 + 1 - 1}}.$$

Eben so hat man aber auch $1 = \frac{b_3}{b_3 + 1 - 1}$, $1 = \frac{b_4}{b_4 + 1 - 1}$ u. s. w.; substituirt man daher allmälig diese Werthe der Einheit, so findet man

$$1 = F[b_1 : (b_1 + 1) - b_2 : (b + 1) - b_3 : (b_3 + 1) \ldots],$$

und daher ist der angegebene Bruch $= a - 1$.

Wären einige der Theilzähler positiv, so würde die Convergenz noch deutlicher sein, und zwar brauchte dann der zum negativen Theilzähler b_m gehörende Theilnenner a_m, auf welchen ein positiver Theilzähler b_{m+1} folgt, nur $= b_m$ zu sein, denn es wäre schon in diesem Falle

$$\frac{b_m}{a_m + \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}} \substack{<1 \\ >0} \text{ und } a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m + \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}} > a_{m-1} - 1,$$

woraus das Übrige wie früher folgt. Man sieht zugleich, dafs der positive

Theilzähler b_{m+1} auch gröfser wie a_{m+1} sein darf, nur müssen die Theilnenner gröfser als die Einheit sein, denn wäre z. B. $a_{m-1}=1$, so wäre $a_{m-1}-\frac{b_m}{a_m \text{ etc.}}$ ein ächter Bruch und $\frac{b_{m-1}}{a_{m-1}-\frac{b_m}{a_m \text{ etc.}}}>1$.

56.

Kettenbrüche, in welchen auch negative Theilzähler vorkommen, wenn sie überhaupt convergiren und allgemein $a_n \overline{\overline{>}} b_n+1$ ist (oder wenn b_n positiv ist, auch $b_n>a_n$), haben eben sowohl wie Kettenbrüche mit nur positiven Theilzählern die Eigenschaft, dafs man sich dem wahren Resultate desto mehr nähert, je mehr Theilbrüche man zur Berechnung der genäherten Resultate anwendet. Denn man bemerke, dafs auch in diesem Falle Zähler und Nenner eines späteren Näherungswerthes bezüglich gröfser sind als die eines früheren, in Zeichen $a, a_{l+1}>a, a_l$; $a_1, a_{l+1}>a_1, a_l$; nimmt man nemlich an, es sei wirklich $a, a_l>a, a_{l-1}$, so hat man $a, a_{l+1}=a_{l+1}.a, a_l \pm b_{l+1}.a, a_{l-1} \ldots$ (§. 6.). Gilt das obere Zeichen, so ist an und für sich klar, dafs $a, a_{l+1}>a, a_l$ ist, gilt aber das untere, so dafs b_{l+1} negativ ist, so hat man nach der Voraussetzung $a_{l+1}\overline{\overline{>}} b_{l+1}+1$, folglich, da $a, a_l>a, a_{l-1}$, auch $a, a_{l+1}>a, a_l$. Es ist aber der Zähler des Bruches $a-\frac{b_1}{a_1}$ oder $a, a_1=a a_1-b_1$*) gröfser als a oder a, a (da $a_1\overline{\overline{>}} b_1+1$ ist), also allgemein $a, a_{l+1}>a, a_l$. Man könnte eben so beweisen, dafs überhaupt $a_l.a_m>a_l, a_{m-1}$, und weil $a_l, a_m=a_m, a_l$; $a_{l+1}, a_m=a_m, a_{l+1}$; so hat man auch $a_l, a_m>a_{l+1}, a_m$, da $a_m, a_l>a_m, a_{l+1}$ ist. Hieraus kann man wie in §. 11. beweisen, dafs $F(a, a_m)-F(a, a_{l+1})$ kleiner ist als $F(a, a_m)-F(a, a_l)$, woraus die Wahrheit unserer Behauptung folgt.

57.

Durch diese Eigenschaft werden aber diese Brüche keinesweges zur nähernden Berechnung eben so tauglich wie die Brüche mit nur positiven Theilzählern. Bei letzteren nemlich sind jede zwei auf einander folgende Näherungswerthe abwechselnd gröfser oder kleiner als der wahre Werth des Kettenbruchs, mithin gehören die ersten Ziffern, die beiden gemeinschaftlich sind, sicher auch dem wahren Werthe an, wodurch man

*) In dem besonderen Falle, wenn $a=1$ und $a_1=b_1+1$ wäre, hätte man $aa_1-b_1=a$, alsdann könnte man zeigen, dafs $a, a_2>a, a_1$ ist.

ein bestimmtes Maafs für den Grad der erhaltenen Annäherung hat. Wäre dagegen z. B. der convergente Kettenbruch $F(a, a_m) = F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 \ldots)$ mit durchaus negativen Theilzählern gegeben, so würden alle Näherungswerthe gröfser als der wahre Werth sein, und man würde daher von keiner Ziffer mit Bestimmtheit angeben können, ob sie dem wahren Werthe angehörte. Denn setzt man zur Abkürzung $F(b_2 : a_2 - b_3 : a_3 - b_4 : a_4 \ldots) = M$, $F(b_3 : a_3 - b_4 : a_4) = M_1$, $F(b_4 : a_4 - b_5 : a_5) = M_2$ u. s. w., so ist

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_1}{a_1 - M}, \quad \frac{b_2}{a_2} < \frac{b_2}{a_2 - M_1}, \quad \frac{b_3}{a_3} < \frac{b_3}{a_3 - M_2} \text{ u. s. w.,}$$

da M, M_1, M u. s. w. positive Gröfsen sind (§. 55.), also

$$a - \frac{b_1}{a_1} > a - \frac{b_1}{a_1 - M}, \quad a - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}} > a - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - M_1}},$$

$$a - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}}} > a - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b^2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - M_2}}} \text{ u. s. w.}$$

Man kann aber in diesem Falle zu jedem Näherungswerthe noch einen anderen Bruch finden, welcher kleiner als der wahre Werth ist, so dafs dieser wieder zwischen zwei Gränzen eingeschlossen ist, und daher die nähernde Berechnung eben so sicher wie bei den Kettenbrüchen mit nur positiven Theilbrüchen angestellt werden kann. Denn da M, M_1, M_2, u. s. w. echte Brüche sind, so hat man

$$a - \frac{b_1}{a_1 - 1} < a - \frac{b_1}{a_1 - M}, \quad a - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - 1}} < a - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - M_1}}, \ \ldots.$$

Die ersten Ziffern, welche den Brüchen

$$a - \frac{b_1}{a_1} \text{ und } a - \frac{b_1}{a_1 - 1}, \quad a - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}} \text{ und } a - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - 1}} \text{ u. s. w.}$$

gemein sind, gehören also auch dem wahren Werthe an. Die Brüche $a - \frac{b_1}{a_1 - 1}$, $a - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - 1}}$ .... könnte man zur Unterscheidung mittelbare Näherungswerthe nennen.

Es sei z. B. der Kettenbruch $\frac{1}{\text{tang } 1} = F(1 - 1:3 - 1:5 - 1:7 - 1:9 \text{ etc.}) \ldots$ (§. 48.) gegeben; die Theilnenner sind sämmtlich gröfser als die entsprechenden Theilzähler, daher convergirt der Bruch, und man findet:

Näherungswerthe.	Mittelbare Näherungswerthe.
$\frac{2}{3} = 0{,}6666666 \ldots.$	$\frac{1}{2} = 0{,}5000000 \ldots.$

Näherungswerthe.	Mittelbare Näherungswerthe.
$\frac{9}{14} = 0{,}6428571\ldots.$	$\frac{7}{11} = 0{,}6363636\ldots.$
$\frac{61}{95} = 0{,}6421052\ldots.$	$\frac{52}{81} = 0{,}6419753\ldots.$
$\frac{540}{841} = 0{,}6420927\ldots.$	$\frac{479}{746} = 0{,}6420911\ldots.$
. . . .	. . . .

Hieraus folgt
$$\frac{1}{\operatorname{tang} 1} \begin{matrix} < 0{,}6420927\ldots. \\ > 0{,}6420911\ldots., \end{matrix}$$
es ist also bestimmt $\frac{1}{\operatorname{tang} 1} = 0{,}64209\ldots.$, und man hat auf diese Weise den Werth des Kettenbruchs schon auf 5 Dezimalstellen genau gefunden. Der wahre Werth ist $\frac{1}{1{,}557407} = 0{,}642092\ldots.$ Dafs bei den Kettenbrüchen mit blos negativen Theilzählern die Näherungswerthe sämmtlich gröfser als der wahre Kettenbruch sind, könnte man auch aus §. 9. beweisen. Man schreibe denselben auf folgende Weise
$$F(a + (-b_1) : a_1 + (-b_2) : a_2 \ldots.) = F(a, a_m),$$
so ist
$$F(a, a\ ) - F(a, a_l) = \pm \frac{a_{l+1}, a_m . -b_1 . -b_2 \ldots. -b_{l+1}}{a_1, a_m . a_1, a_l},$$
wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Anzahl der Theilzähler $b_1 \ldots. b_{l+1}$ ungerade oder gerade ist. In jedem Falle ist also $F(a, a_m) - F(a, a_l)$ negativ oder $F(a, a_l) > F(a, a_m)$, da a_{l+1}, a_m; a_1, a_m; a_1, a_l positive Gröfsen sind (§. 55.).

58.

Wären die Theilzähler alle negativ, und nicht allgemein $a_n \overline{\overline{>}} b_{n+1}$, so würde daraus noch nicht folgen, dafs der Kettenbruch zur Berechnung untauglich wäre, sondern im Gegentheil, wenn auch unter den ersten Theilzählern manche die entsprechenden Theilnenner übertreffen, sobald sie nur von irgend einem b_r an gerechnet, sämmtlich kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind, so wird der Bruch von dort an nach §. 55., und daher auch der ganze Kettenbruch nach §. 54. convergent sein; wenn daher auch die ersten Glieder keine genügende Resultate zur nähernden Berechnung bieten, so kann man doch so viel Theilbrüche zu Hülfe nehmen, dafs auch ein Theil der auf b_r folgenden sich darunter befindet, und so mit Hülfe der mittelbaren Näherungswerthe immer Gränzen finden, zwischen welchen das wahre Resultat liegt. Hieraus folgt, dafs jeder

Kettenbruch zur nähernden Berechnung tauglich ist, bei welchem die Theilzähler einen beständigen Werth haben, während die Theilnenner ins Unendliche fortwachsen, weil man, wie grofs auch der Werth der Theilzähler angenommen wird, immer an einen Theilbruch kommt, von welchem an gerechnet, die Theilzähler kleiner als die Theilnenner sind. Dies ist z. B. der Fall bei dem Kettenbruche

$$\frac{t}{\operatorname{tang} t} = F(1 - t^2:3 - t^2:5 - t^2:7 - t^2:9 \ldots.) \quad (\S. 48.).$$

Setzt man $t = 2$, so ist

$$\frac{2}{\operatorname{tang} 2} = F(1 - 4:3 - 4:5 - 4:7 - 4:9 \ldots.).$$

Der erste Theilzähler 4 ist gröfser als der Theilnenner, die übrigen Theilzähler aber sind sämmtlich kleiner als die entsprechenden Theilnenner, daher wird sich der Bruch $1 - \frac{4}{3}$ sehr weit vom wahren Resultate entfernen, je mehr Theilbrüche man aber zur Berechnung anwendet, desto näher kommt man dem wahren Resultate. Fängt man die Rechnung an, so findet man

Näherungswerthe.	Mittelbare Näherungswerthe.
$-\frac{1}{3} = -0{,}3333333 \ldots,$	$1 - \frac{4}{2} = -1{,}0000000 \ldots,$
$-\frac{9}{11} = -0{,}8181818 \ldots,$	$-1 = -1{,}0000000 \ldots,$
$-\frac{59}{65} = -0{,}9076923 \ldots.$	$-\frac{25}{27} = -0{,}9259259 \ldots,$
$-\frac{495}{541} = -0{,}9149722 \ldots,$	$-\frac{109}{119} = -0{,}9159663 \ldots.$
$-\frac{5209}{5691} = -0{,}9153048 \ldots$	$-\frac{2357}{2575} = -0{,}9153398 \ldots.$

Hieraus folgt

$$\frac{2}{\operatorname{tang} 2} \begin{matrix} > 0{,}9153048 \ldots, \\ < 0{,}9153398 \ldots \end{matrix}$$

also

$$\frac{2}{\operatorname{tang} 2} = -0{,}9153 \ldots.,$$

der wahre Werth ist

$$\frac{2}{2{,}1850404 \ldots} = 0{,}91531 \ldots.$$

59.

Nach den Kettenbrüchen mit blofs negativen Theilzählern werden noch diejenigen besondere Berücksichtigung verdienen, bei welchen die Theil-

zähler abwechselnd positiv oder negativ sind, die also durch

$$F(a, a_m) = F(a - b_1 : a_1 + b_2 : a_2 - b_3 : a_3 + b_4 \ldots.)$$

angedeutet werden können. Zur Convergenz ist nur erforderlich, dafs b_1, b_3, b_5, ... bezüglich nicht gröfser als a_1, a_3, a_5 .... sind, dagegen können b_2, b_4 .... gröfser als a_2, a_4 .... sein (§. 55.); sollen aber die Näherungswerthe bestimmt dem Kettenbruche immer näher kommen, so mufs a_1, a_3, a_5 .... gröfser als b_1, b_3, b_5 .... u. s. w. sein (§. 56.), und zwar werden die zwei ersten Näherungswerthe $F(a, a_1) = a - \frac{b_1}{a_1}$, $F(a, a_2) = a - \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}$ kleiner, die zwei folgenden gröfser als der wahre Werth sein, und überhaupt werden diejenigen Näherungswerthe, welche $4s+1$, $4s+2$ Theilzähler enthalten, kleiner, dagegen diejenigen die $4s$, $4s+3$ enthalten, gröfser als der wahre Werth sein. Denn schreibt man den Kettenbruch auf folgende Weise:

$$F(a, a_m) = F[a + (-b_1) : a_1 + b_2 : a_2 + (-b_3) : a_3 + b_4 : a_4 \ldots.),$$

so ist allgemein

$$F(a, a_m) - F(a, a_l) = \pm \frac{a_{l+2}, a_m . -b_1 . b_2 . -b_3 \ldots (\mp b_{l+1})}{a_1, a_m . a_1, a_l},$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem die Anzahl der Theilzähler $b_1 . b_2 \ldots . b_{l+1}$ ungerade oder gerade ist (§. 9.), oder je nachdem l gerade oder ungerade ist. Daher wird $F(a, a_m) - F(a, a_l)$ positiv sein, wenn $l = 1, 5, 9$ .... oder $= 2, 6, 10$ .... ist, dagegen negativ, wenn $l = 3, 7, 11$ .... oder $= 4, 8, 12$ .... ist, wie behauptet wurde. Wenn man daher zur nähernden Berechnung nur den zweiten und dritten, vierten und fünften, sechsten und siebenten Näherungswerth u. s. w. anwenden will, so kann man diese Kettenbrüche eben so sicher, wie die mit nur positiven Theilzählern anwenden, weil zwischen zwei solchen Näherungswerthen immer der wahre Werth liegt; will man dagegen alle Näherungswerthe benutzen, so mufs man wieder zwischen dem ersten und zweiten, dritten und vierten u. s. w. einen mittelbaren Näherungswerth einschalten.

Wäre der Kettenbruch in der Form $F(a + b_1 : a_1 - b_2 : a_2 + b_3 : a_3 \ldots.)$ enthalten, so müfste b_2, b_4, b_6 u. s. w. kleiner als a_2, a_4, a_6 u. s. w. sein, und es würden alsdann die Näherungswerthe kleiner oder gröfser als der Kettenbruch sein, je nachdem sie $4s$, $4s+1$, oder $4s+2$, $4s+3$ Theilzähler enthielten, was man wieder aus der Formel

$$F(a, a_m) - F(a, a_l) = \pm \frac{a_{l+2} \,.\, a_m \,.\, b_1 \,.\, - b_2 \,.\, b_3 \,\ldots\, (\pm b_{l+1})}{a_1 \,,\, a_m \,.\, a_1 \,,\, a_l}$$

ableiten kann. Man mufs auch hier wieder eine ähnliche Bemerkung machen, wie in (§. 58.), dafs nämlich der Kettenbruch zur Berechnung tauglich ist, wenn auch nur von einer gewissen Gränze an die Theilzähler kleiner als die dazu gehörenden Theilnenner sind. Es sei z. B. der Ausdruck

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{1.2} + \frac{t^3}{1.2.3} \ldots .$$

gegeben (wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ausdrückt). Setzt man in Form. $A.$ (§. 48.) $a = R$, $b = 1$, $c = 1$, $x = \frac{t}{R}$, wo R eine unbegrenzt grofse Zahl bedeutet, so wird

$$e^t = \Phi\left(k, 1, 1, \frac{t}{k}\right),$$

und (ebend. Form. 4.)

$$e^t = F\left[1:1 - t:1 + \frac{t}{2}:1 - \frac{t}{6}:1 + \frac{t}{6}:1 \text{ etc.}\right] =$$
$$F(1:1 - t:1 + t:2 - t:3 + t:2 - t:5 + t:2).$$

Dieser Bruch wird also unter allen Umständen convergiren, weil man, wie grofs auch t angenommen wird, immer an einen Theilbruch kommt, von welchem an gerechnet, alle negativen Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind.

Setzt man $t = 1$, so folgt hieraus:

$$\frac{1}{e} = F(1 - 1:1 + 1:2 - 1:3 + 1:2 - 1:5 + 1:2 \text{ etc.}),$$

und man findet:

Näherungswerthe.	Mittelbare Näherungswerthe.
$0 = 0{,}0000000 \ldots .$	
	$\frac{1}{2} = 0{,}5000000 \ldots .$
$\frac{1}{3} = 0{,}3333333 \ldots .$	
$\frac{3}{8} = 0{,}3750000 \ldots .$	
	$\frac{4}{11} = 0{,}3636363 \ldots .$
$\frac{7}{19} = 0{,}3684210 \ldots .$	
$\frac{32}{87} = 0{,}3678160 \ldots .$	
	$\frac{39}{106} = 0{,}3679425 \ldots .$
$\frac{71}{193} = 0{,}3678756 \ldots .$	

also

$$\frac{1}{e} \begin{matrix} > 0{,}3678756 \ldots . \\ < 0{,}3679245 \ldots . \end{matrix}$$

und daher

$$\frac{1}{e} = 0{,}367 \ldots .$$

Der wahre Werth ist

$$\frac{1}{2{,}718281828} = 0{,}3678794\ldots.$$

Ein Kettenbruch, in welchem die Theilzähler abwechselnd positiv und negativ sind, wird auch convergiren, wenn die den positiven Theilzählern entsprechenden Theilnenner fortwährend wachsen, während die negativen Theilzähler und die dazu gehörenden Theilnenner beständig dieselben bleiben. Einen Bruch dieser Art kann man z. B. aus

$$e^t = F(1:1 - t:1 + t:2\ldots.)$$

ableiten, denn setzt man $-t$ statt t, so erhält man

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t} = F(1:1 + t:1 - t:2 + t:3 - t:2 + t:5 - t:2\ldots.).$$

Wie grofs man aber auch t in dem letzten Kettenbruche nimmt, immer wird man an einen, einem positiven Theilzähler entsprechenden Theilnenner kommen, der gröfser als $\frac{t}{2}$ ist, daher wird $\frac{t}{m} - \frac{t}{2}$ eben so wohl positiv sein als $\frac{t}{m}$, und es wird überhaupt von dort an der Kettenbruch convergiren.

60.

Seltener werden Kettenbrüche vorkommen, in welchen die Zeichen auf eine weniger regelmäfsige Weise abwechseln. Immer aber werden sich die Näherungswerthe dem wahren Werthe mehr und mehr nähern, sobald die negativen Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind, und man wird bei einem jeden Näherungswerthe durch die Formel

$$F(a, a_m) - F(a, a_l) = \pm \frac{a_{l+1} \,.\, a_m \,.\, (\pm b_1) \,.\, (\pm b_2) \ldots. (\pm b_{l+1})}{a_1 \,,\, a_m \,.\, a_1 \,.\, a_l},$$

entscheiden können, ob er gröfser oder kleiner als der wahre Werth ist.

61.

Man kann das in §. 55.—60 Gesagte noch auf eine andere Weise ableiten. Statt nemlich die Kettenbrüche mit negativen Theilzählern unmittelbar zu betrachten, kann man sie, vermöge der Formel $-\frac{b_m}{a_m + R} = -1 + \frac{1}{1} + \frac{b_m}{a_m - b_m + R}$ (§.19.), in andere verwandeln, die nur positive Zeichen enthalten, also nothwendig convergiren. Enthält der Kettenbruch $F(a, a_m)$ nur negative Theilzähler, ist er also $= F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 \ldots.)$, so giebt die Verwandlung

$$F(a, a_m) = F[(a - 1) + 1:1 + b_1:(a_1 - b_1 - 1) + b\ :(a_2 - b_2 - 1)\ldots.].$$

Hieraus sieht man, dafs, wenn dieser Bruch durchaus positiv sein soll, $a_m \overline{>} b_n + 1$ sein mufs (§. 55.), dafs ferner die Brüche $a - \frac{b_1}{a_1}$, $a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2}}$ u. s. w. sämmtlich gröfser als der wahre Werth sind (§. 57.), denn ihnen entsprechen die Brüche

$$F[(a-1)+1:1+b_1:(a_1-b_1-1)+1:1],$$

$$F[(a-1)+1:1+b_1:(a_1-b_1-1)+1:1+b_2:(a_2-b_2-1)+1:1]$$ u. s. w.,

die sämmtlich gröfser als der wahre Werth sind. Dagegen entsprechen die mittelbaren Näherungswerthe $a - \frac{b_1}{a_1 - 1}$, $a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - 1}}$ u. s. w. den Brüchen $F[(a-1)+1:1+b_1:(a_1-b_1-1)]$,

$$F[(a-1)+1:1+b_1:(a_1-b_1-1)+1:1+b_2:a_2-b_2-1]$$ u. s. w.,

die kleiner als der wahre Werth sind. Man erhält daher durch diese Verwandlung dieselben Näherungswerthe, wie durch das in (§. 57.) gezeigte Verfahren, nur ist letzteres kürzer und daher in der Anwendung vorzuziehen. Auf ähnliche Weise könnte man auch die übrigen im Frühern gefundenen Sätze ableiten; jedoch ist es unnöthig, hierbei länger zu verweilen.

62.

Sobald nicht, von einer gewissen Gränze an, alle Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind, so hört bei den Kettenbrüchen mit negativen Theilzählern die Gewifsheit, dafs sie convergiren, auf (einzelne Fälle wie in §. 59. ausgenommen), keineswegs aber werden solche Kettenbrüche bestimmt divergiren. Man wird sich von der Convergenz oder Divergenz eines solchen Kettenbruchs am besten überzeugen, wenn man das Gesetz aufsucht, nach welchem die Näherungswerthe gebildet werden. Soll der Bruch $F(a \pm b_1 : a_1 \pm b : a_2 \ldots.)$ divergiren, also $= \pm \infty$ sein, so wird auch $F(\pm b : a_2 \pm b_3 : a_3 \ldots.) = \pm \infty$, und $F(a_1 \pm b_2 : a_2 \ldots.) = 0$ sein; man hat daher nur zu untersuchen, ob die Näherungswerthe des letzteren Kettenbruchs so beschaffen sind, dafs ihre Nenner in einem viel gröfseren Verhältnisse wachsen als die Zähler, so dafs zuletzt ihre Quotienten, d. h. die Näherungswerthe, unter jede angebbare Zahl heruntersinken oder $= 0$ werden. Ist dies nicht der Fall, so wird

$$F(a \pm b_1 : a_1 \pm b_2 : a_2 \ldots.)$$

einen bestimmten Werth haben. Es sei z. B. der Kettenbruch

$$1 - \frac{2}{2 - \frac{3}{3 - \frac{4}{4 \text{ etc.}}}} = {}^{m}_{2-\infty} F\left(1 - \frac{m}{m}\right)$$

gegeben, und es soll untersucht werden, ob er divergirt. Man untersuche daher, ob der Bruch $2 - \frac{3}{3 - \frac{4}{4 \text{ etc.}}} = 0$ ist; sucht man seine einzelnen Näherungswerthe, so findet man

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{3} = \frac{1}{1},\ \frac{4(3-2)}{4(3-1)} = \frac{1}{2},\ \frac{5(4-3)}{5(8-3)} = \frac{1}{5},\ \frac{6(5-4)}{6(25-8)} = \frac{1}{17}, \text{ u. s. w.}$$

Man sieht hieraus, daſs die Zähler der Näherungswerthe sich alle auf Eins reduciren, während die Nenner ins Unendliche fort wachsen, daher ist allerdings der Werth des Kettenbruchs

$$2 - \frac{3}{3 - \frac{4}{4 \text{ etc.}}} = 0, \text{ oder } 1 - \frac{2}{2 - \frac{3}{3 \text{ etc.}}} = -\infty,$$

d. h. der letzte Bruch divergirt.

Aus der Gleichung $2 - \frac{3}{3 - \frac{4}{4 \text{ etc.}}} = 0$, folgt $\frac{3}{3 - \frac{4}{4 \text{ etc.}}} = 2$, oder $\frac{4}{4 - \frac{5}{5 \text{ etc.}}} = \frac{3}{2}$ und $\frac{5}{5 - \frac{6}{6 \text{ etc.}}} = \frac{4}{3}$ u. s. w. Hieraus kann man nach Analogie schlieſsen, daſs $\frac{m}{m - \frac{m+1}{m+1 - \frac{m+2}{m+2}}} = \frac{m-1}{m-2}$ ist (wo m eine ganze positive Zahl bedeutet), und es ist leicht, die Wahrheit dieses allgemeinen Ausdrucks darzuthun. Angenommen, er sei für irgend einen Werth von m richtig, so wird er auch für den Werth $m+1$ gelten. Denn man hätte in diesem Falle $\frac{m}{m - \frac{m+1}{m+1 \text{ etc.}}} = \frac{m-1}{m-2}$, folglich, wenn man $m - \frac{m+1}{m+1 \text{ etc.}} = m - x$ setzt, $\frac{m}{m-x} = \frac{m-1}{m-2}$ oder $x = \frac{m}{m-1}$, d. h. $\frac{m+1}{m+1 - \frac{m+2}{m+2 \text{ etc.}}} = \frac{m}{m-1}$, wie verlangt wurde. Da nun wirklich für die Werthe $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ \frac{m}{m - \frac{m+1}{m+1 \text{ etc.}}} = \frac{m-1}{m-2}$ ist, so gilt der Ausdruck auch für alle folgenden Werthe von m.

Man hätte den Werth dieses Kettenbruchs auch auf folgende einfache Weise finden können. So wie nemlich (§. 27.) gezeigt wurde, daſs die zwei Kettenbrüche $F(a : a + a : a_1 + a_1 : a_2 + a_2 : a_3 \ldots .)$ und $F(a_1 : a_1 + a_2 : a_2 \ldots .)$ gleich sind, so kann man auch darthun, daſs die beiden Kettenbrüche $F(1 : 1 - 1 : a_1 - a_1 : a_2 - a_2 : a_3 \ldots .)$ und $F(a_1 : a_1 - a_2 : a_2 - a_3 : a_3 \ldots .)$ gleich sind. Nun folgt aus §. 55., $F(m - m : (m+1) - (m+1) : (m+2) \ldots .) = m - 1$: setzt man daher $a_1 = m$, $a_2 = m+1$, $a_3 = m+2$ u. s. w., so ist

$$F[1:1-1:m-m:(m+1)-(m+1):(m+2)\ldots.]=$$
$$\frac{1}{1}-\frac{1}{m-1}=\frac{m-1}{m-2}=F[m:m-(m+1):(m+1)-(m+2):(m+2)\ldots.],$$
wie schon gefunden wurde.

Es wäre auch leicht, aus dem gegebenen Werthe $\frac{m-1}{m-2}$ den entsprechenden Kettenbruch $F[m:m-(m+1):(m+1)\ldots.]$ abzuleiten; man bemerke nur, dafs $\frac{m-1}{m-2}=\frac{m}{m}-\frac{m}{m-1}$ ist; hieraus folgt $\frac{m}{m-1}=\frac{m+1}{m+1}-\frac{m+1}{m}$, $\frac{m+1}{m}=\frac{m+2}{m+2}-\frac{m-2}{m-1}$ u. s. w. Substituirt man nun statt $\frac{m}{m-1}$, $\frac{m+1}{m}$ u. s. w. ihre gefundenen Werthe, so erhält man aus der Gleichung $\frac{m-1}{m-2}=\frac{m}{m}-\frac{m}{m-1}$ den gesuchten Kettenbruch.

63.

Nach diesen Vorbereitungen wird es leichter sein, die Theorie der Summation der Kettenbrüche zu entwickeln. Die Summe eines Kettenbruchs kann entweder mittelbar gesucht werden, indem man den Kettenbruch auf einen anderen ins Unendliche fortlaufenden Ausdruck zurückführt, dessen Summe leichter gefunden werden kann, oder unmittelbar, indem man einen geschlossenen Ausdruck sucht, der den Werth des Kettenbruchs angiebt. Die ins Unendliche fortlaufenden Ausdrücke lassen sich aber auf drei Klassen zurückführen, deren Entstehung auf den arithmetischen Grundoperationen beruht. Die unendlichen Reihen sind ein fortgesetztes Addiren und Subtrahiren, die unendlichen Producte ein fortgesetztes Multipliciren, die Kettenbrüche ein fortgesetztes Dividiren. Alle anderen continuirlichen Ausdrücke müssen sich auf diese zurückführen lassen; die mittelbare Summation der Kettenbrüche wird sich daher darauf beschränken, dafs man diese entweder in unendliche Reihen oder in unendliche Producte verwandelt. Die Regeln zu dieser Verwandlung sind in den vorhergehenden Capiteln gegeben, und es wäre daher dieser Gegenstand als abgethan zu betrachten, wenn nicht noch einige Umstände zu berücksichtigen wären, deren Nichtbeachtung zu grofsen Irrthümern führen kann und geführt hat. Wird ein convergenter Kettenbruch nach §. 28. oder §. 50. in eine Reihe oder in ein unendliches Product verwandelt, so ist hier weiter keine Vorsicht nöthig, sondern sobald man im Stande ist, die Summe einer solchen Reihe oder eines solchen Products anzugeben, so wird diese mit Bestimmtheit auch als Werth des Kettenbruchs

angesehen werden können. Die nach dieser Methode erhaltenen Reihen oder Producte sind nicht blofs im Ganzen dem Kettenbruche gleich, sondern es entspricht auch jeder Theil, jeder Näherungswerth derselben, einem Theile, einem Näherungswerthe des Kettenbruchs. Anders aber verhält es sich mit den Methoden, die in §. 35. — 48. gezeigt wurden, und mit anderen diesen ähnlichen. Hier nemlich ist keinesweges die Reihe dem Kettenbruche auch theilweise gleich, sondern es wird blofs der Kettenbruch aus der Reihe, oder die Reihe aus dem Kettenbruche durch gewisse analytische Operationen entwickelt, so dafs sie gegenseitig nicht als Summe von einander, sondern vielmehr als erzeugende Function zu betrachten sind. Daher wird sich nach diesen Methoden nicht immer aus einem convergenten Kettenbruche eine convergente Reihe, und umgekehrt, ergeben, sondern der eine Ausdruck kann convergiren, während der ihm gleichgesetzte divergirt, ja der eine kann positiv sein, während der andere als negative Gröfse erscheint. Die Lösung dieses Widerspruchs liegt, wie in allen ähnlichen Fällen, darin, dafs man nie den bei der Entwickelung übrig bleibenden Rest unberücksichtigt lassen darf. Man hat daher Folgendes zu merken. Wird irgend eine Reihe S in einen Kettenbruch verwandelt, dessen allmählige Entwickelung durch

$$a + \frac{b_1}{a_1 + R_1}, \quad a + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + R_2}} \quad \text{u. s. w.}$$

angedeutet wird, so dafs R_1, R_2 u. s. w. den jedesmal bei der Entwickelung übrig bleibenden Rest bedeutet, und sind die Theilzähler b_1, b_2 u. s. w. sämmtlich positive Gröfsen (die Theilnenner werden immer stillschweigend positiv gedacht), so kommt es darauf an, ob auch die Reste sämmtlich positive Gröfsen sind, oder nicht. Im ersten Falle kann man den unendlichen Kettenbruch mit Sicherheit als Werth der Reihe betrachten: die Vernachläfsigung irgend eines Restes kann keinen weiteren Einflufs auf das Resultat haben, als dafs dasselbe noch nicht ganz genau ist, je weiter man aber in der Entwickelung geht, desto näher wird der Kettenbruch, seiner Natur nach, dem Werthe der Reihe kommen, desto weniger wird also die Vernachlässigung des Restes schaden. Ist aber irgend ein Rest R_m negativ, so kommt es darauf an, ob er gröfser oder kleiner als a_m ist. Im letzten Falle ist a_m eben sowohl wie $a_m - R_m$ eine positive Gröfse, wenn man daher statt $a_m - R_m$ nur a_m in Rechnung bringt, so

kann man sich zwar noch vom wahren Werthe sehr entfernen, aber man wird kein falsches Resultat erhalten, sondern es wird sich

$$F(a+b_1:a_1+\ldots+b_m:a_m),$$

dem wahren Werthe der Reihe desto mehr nähern, je größer m ist; ist dagegen R_m größer wie a_m, also a_m-R_m eine negative Größe, so würde man, wenn man nur a_m zur Berechnung anwenden wollte, statt einer negativen Größe eine positive nehmen, und man könnte als Resultat eine positive Größe erhalten, während der wahre Werth negativ ist. Jedoch wenn $b_m<a_m-R_m$ ist, so kann man noch immer den Kettenbruch zur Berechnung anwenden $\left(\text{weil alsdann } a_{m-1}+\frac{b_m}{a_m} \text{ eben sowohl eine positive Größe ist wie } a_{m-1}+\frac{b_m}{a_m-R_m}\right)$, oder allgemeiner, wenn

$$a_{m-1}>\frac{b_m}{a_m-R_m}$$

ist (ohne Rücksicht auf das Zeichen). Ähnlich verhält es sich mit den Kettenbrüchen, deren Theilzähler sämmtlich oder theilweise negativ sind. Soll der Bruch bestimmt convergiren, so muſs jeder negative Theilzähler b_m kleiner als a_m sein; gehört daher zu a_m ein positiver Rest R_m, so kann der Kettenbruch unbedenklich zur Berechnung des Werthes der Reihe angewandt werden; ist R_m negativ, aber $b_m<a_m-R_m$ und zugleich $R_m<a_m$, so kann der Kettenbruch noch immer gebraucht werden; ist aber b_m nicht $<a_m-R_m$, so kann der Werth der Reihe S nicht mehr aus dem des Kettenbruchs abgeleitet werden. Es könnte sein, daſs die Reihe divergirte, während der Kettenbruch convergirt, und wenn $R_m>a_m$ ist, so würde man statt der positiven Größe $-\frac{b_m}{a_m-R_m}$ die negative $-\frac{b_m}{a_m}$ genommen, und also das Resultat vom Positiven zum Negativen geändert haben.

Zuweilen erscheint die bei der Entwickelung des Kettenbruchs vernachlässigte Größe auch in Form eines Factors, und dies ist immer der Fall, wenn der Kettenbruch nach §. 48. entwickelt wird. Sind alsdann die Theilzähler positiv, und ist der vernachlässigte Factor P ebenfalls positiv, so kann man ohne Bedenken den unendlichen Kettenbruch als Werth der entsprechenden Reihe ansehen. Denn der Ausdruck $a_{m-1}+\frac{b_m}{a_m}$ ist eben sowohl eine positive Größe wie $a_{m-1}+\frac{b_m}{a_m.P}$; die Vernachlässigung von P kann also nur bewirken, daſs der Kettenbruch den gesuchten Werth nicht ganz genau giebt; je weiter man aber in der Entwickelung fortgeht, desto mehr wird man sich dem wahren Werthe nä-

hern; ist dagegen der Factor P negativ, so kann man ihn nur dann mit Sicherheit vernachlässigen, wenn $a_{m-1} > \frac{b_m}{a_m . P}$ ist. Sind dagegen die Theilzähler negativ, so mufs, wenn der Kettenbruch bestimmt convergiren soll, b_m kleiner als a_m sein; es wird daher immer erlaubt sein, statt $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m . P}$ näherungsweise den Werth $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m}$ zu setzen, wenn P gröfser als die Einheit ist. Ist dagegen P ein ächter positiver Bruch, so mufs $a_m . P > b_m$ sein, sonst könnte $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m . P}$ negativ sein, während $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m}$ positiv ist; ist endlich P negativ, so kann dieser Factor in jedem Falle vernachlässigt werden. Man wird diese Bemerkungen mit den vorhergehenden zusammenstimmend finden, wenn man bedenkt, dafs aus

$$a_m \pm R_m = a_m . P$$
$$\pm R_m = (P-1) a_m$$

folgt.

Es wurde früher der Ausdruck $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = {}_{1}\overset{m}{\underset{}{-}}{}_{\infty} F[x + x^2 : (2m+1)]$ gefunden. Um nun zu untersuchen, ob der unendliche Kettenbruch für jeden Werth von x den Werth von $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ angiebt, entwickele man ihn nach §. 48. Man hat mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnung:

$$e^x - e^{-x} = 2x\varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right), \quad e^x + e^{-x} = 2\varphi\left(R, R', \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right),$$

wo R, R' unendlich grofse Zahlen sind. Die Ausdrücke

$$\varphi\left(R, R', \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right), \quad \varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)$$

sind für jeden Werth von x positiv; eben so werden auch die Ausdrücke

$$\varphi\left(R, R', \frac{5}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right), \quad \varphi\left(R, R', \frac{7}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)$$

u. s. w. immer positiv sein. Entwickelt man nun $\frac{\varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}{\varphi\left(R, R', \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}$ nach Formel (2.) des §. 48., so hat man

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{\cfrac{3\varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}{\varphi\left(R, R', \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{\cfrac{5\varphi\left(R, R', \frac{5}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}{\varphi\left(R, R', \frac{7}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}}}} \quad \text{etc.}$$

Da aber $\frac{\varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}{\varphi\left(R, R', \frac{5}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}$ und jeder der folgenden ähnlichen Ausdrücke einen positiven Werth hat, so kann man, wenn der Kettenbruch ins Unendliche fortgesetzt wird, von dem vernachlässigten Factor ganz abstrahiren, und es ist daher, für jeden Werth von x,

$${}_{1}\overset{m}{-}{}_{\infty}F(x:1+x^2:(2m+1)) \text{ der wahre Werth des Ausdrucks } \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Schwerer würde es sein, direct zu beweisen, dafs

$${}_{1}\overset{m}{-}{}_{\infty}F(x:1-x^2:(2m+1))$$

für alle Werthe von x, den wahren Werth von $\tang x$ angiebt, und der Rest vernachlässigt werden kann; auf indirectem Wege kann es leicht geschehen. Denn dieser Kettenbruch convergirt für jeden Werth von x in ganzen (oder rationalen) Zahlen (§. 58.), und daher auch für jeden irrationalen Werth von x. Man kann nemlich auf ähnliche Weise wie in §. 55. beweisen, dafs der Kettenbruch $F(a-b_1:a_1-b_2:a_2\ldots.)$ auch für irrationale Werthe von b_1, b_2, ... convergiren wird, sobald nur allgemein $b_m \overline{\gtrless} a_m - 1$ ist, woraus das Übrige von selbst folgt. Setzt man für x irgend einen zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ enthaltenen Werth, wo π die halbe Peripherie für den Halbmesser 1 bedeutet, so ist x, und daher auch x^2 kleiner als die Einheit, folglich auch $\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5 \text{ etc.}}}$ kleiner als die Einheit, und $\cfrac{x^2}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5 \text{ etc.}}}}$ eine positive Gröfse. Nun ist die Tangente zwischen diesen Gränzen immer positiv. Die Vernachlässigung des Restes kann also nur bewirken, dafs das Resultat nicht ganz genau ist; je mehr Glieder des convergirenden Kettenbruchs man aber zur Berechnung anwendet, desto näher wird man dem wahren Werthe kommen, und der unendliche Kettenbruch kann unbedenklich als Ausdruck desselben angesehen werden. Aus den Werthen der Tangenten zwischen den Grenzen $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, können aber, wie bekannt, alle übrigen Tangenten abgeleitet werden; es möge nur noch der Fall, wenn $x=\frac{\pi}{2}$ ist, besonders betrachtet werden. Man hat

alsdann $\tang x = \infty$; darf daher der Rest des Kettenbruchs vernachlässigt werden, so ist

$$\infty = \cfrac{\pi:2}{1-\cfrac{\pi^2:4}{3-\cfrac{\pi^2:4}{5 \text{ etc.}}}} = \cfrac{\pi}{2-\cfrac{\pi^2}{6-\cfrac{\pi^2}{10 \text{ etc.}}}}$$

folglich nothwendig

$$2 = \cfrac{\pi^2}{6-\cfrac{\pi^2}{10-\cfrac{\pi^2}{14 \text{ etc.}}}}$$

Man überzeugt sich aber bald, daſs die ersten Näherungswerthe des letzteren Kettenbruchs wirklich gegen den Werth 2 convergiren, daher wird, da der ganze Kettenbruch convergirt, 2 der Werth desselben sein, und der Rest kann unberücksichtigt bleiben.

64.

Besonders wichtig für die Theorie der Summation der Kettenbrüche ist auch der Umstand, daſs man in vielen Fällen, ohne noch den Werth derselben zu kennen, bestimmen kann, ob dieser Werth rational sein wird, oder nicht. Es ist in dieser Beziehung Folgendes zu bemerken.

I. Ist ein Kettenbruch $F(a_m, a_{m+n})$ gegeben, in welchem alle Theilzähler und Theilnenner rationale Gröſsen sind, und ist der Werth von $F(a_m, a_{m+n})$ nicht rational, so kann auch der Werth des ganzen Kettenbruchs nicht rational sein. Denn wäre er rational, so würde aus der Formel

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{F(a_m, a_{m+n}).a, a_{m-1} + b_m.a, a_{m-2}}{F(a_m, a_{m+n}).a_1, a_{m-1} + b_m.a_1, a_{m-2}} \quad (§. 7.)$$

auch der Werth von $F(a_m, a_{m+n})$ rational gefunden, gegen die Voraussetzung.

II. Hat ein unendlicher Kettenbruch nur positive Theilzähler und Theilnenner (die sämmtlich ganze Zahlen sind), und sind die Theilzähler nicht gröſser als die ihnen entsprechenden Theilnenner, so ist der Kettenbruch nothwendig irrational. Denn man habe den Kettenbruch

$$\frac{b_1}{F(a_1, a_m)} = \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3 \text{ etc.}}}},$$

so daſs $b_1 \overline{\overline{<}} a_1$, $b_2 \overline{\overline{<}} a_2$, $b_3 \overline{\overline{<}} a_3$ u. s. w. ist, so ist

$$\frac{b_1}{F(a_1, a_m)} < 1, \quad \frac{b_2}{F(a_2, a_m)} < 1 \text{ u. s. w.}$$

Wäre nun $\frac{b_1}{F(a_1, a_m)}$ einer rationalen Zahl gleich, so setze man diese $= \frac{B}{A}$,

also $B<A$ (B und A sind ganze Zahlen); es ist aber $\frac{B}{A}<\frac{b_1}{a_1}$, folglich b_1A-a_1B eine positive Zahl. Sie heifse C, so ist $\frac{B}{A}=\frac{b_1}{a_1+\frac{C}{B}}$, also $\frac{C}{B}=\frac{b_2}{F(a_2, a_m)}$ oder $\frac{C}{B}<\frac{b_2}{a_2}<1$, d. h. $C<B$. Nun setze man $b_2B-a_2C=D$, so findet man wieder $\frac{D}{C}=\frac{b_3}{F(a_3, a_m)}$, $\frac{D}{C}<\frac{b_3}{a_3}<1$ oder $D<C$. Auf diese Weise erhielte man eine unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen A, B, C, D, ..., die immer kleiner würden, was unmöglich ist, also kann der Werth von $\frac{b_1}{F(a_1, a_m)}$ nicht rational sein.

Der Kettenbruch $F(x:1+x^2:3+x^2:5\ldots.)$ hat nie einen rationalen Werth, sobald x einen solchen hat, weil man, wie grofs auch der Werth von x sei, immer an einen Theilzähler x^2 kommt, von welchem an alle Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind (II. und I.), daher hat (§. 63.) auch $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ keinen rationalen Werth, also hat auch $\frac{e^x+1}{2}=\frac{1}{1-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$ keinen solchen, d. h. die Basis der natürlichen Logarithmen, und jede rationale Potenz derselben, ist eine irrationale Gröfse *).

III. Sind die Theilnenner positiv, aber alle Theilzähler negativ, so wird der Kettenbruch $\frac{b_1}{F(a_1, a_m)}=\frac{b_1}{a_1-\frac{b_2}{a_2 \text{ etc.}}}$ irrational sein, wenn alle Theilnenner gröfser als die entsprechenden Theilzähler sind. Denn auch in diesem Falle ist $\frac{b_1}{F(a_1, a_m)}<1$, $\frac{b_2}{F(a_2, a_m)}<1$, u. s. w. (§. 55.). Wäre $\frac{b_1}{F(a_1, a_m)}$ rational $=\frac{B}{A}$, $B<A$ (wo B und A ganze Zahlen sind), so hätte man $\frac{B}{A}>\frac{b_1}{a_1}$, daher setze man $a_1B-b_1A=C$, so ist C positiv und $\frac{C}{B}=\frac{b_2}{F(a_2, a_m)}$, $C<B$. Führt man auf diese Weise fort, so würde man wieder eine unendliche Reihe A, B, C .... ganzer Zahlen finden, die

*) Die Idee, die Irrationalität gewisser Ausdrücke mit Hülfe der Kettenbrüche zu beweisen, verdankt man Lambert. Vergl. *hist. de l'ac. de Berl.* 1761. pag. 265 ff.

immer kleiner werden. Die Unmöglichkeit einer solchen zeigt, dafs $\frac{b_1}{F(a_1, a_m)}$ irrational ist. Nur in dem Falle, wenn jeder Theilnenner um eine Einheit gröfser als der entsprechende Theilzähler ist, ist der Kettenbruch rational (§. 55.).

Ganz auf dieselbe Weise kann man auch zeigen, dafs der Kettenbruch unter denselben Voraussetzungen irrational sein wird, wenn nur ein Theil der Theilzähler negativ ist, nur braucht alsdann der zu einem negativen Theilzähler b_m gehörende Theilnenner a_m, auf welchen ein positiver Theilzähler folgt, nur $= b_m$ zu sein (§. 55.).

Aus dem Vorhergehenden folgt, dafs der Kettenbruch

$$\overset{m}{_{m-\alpha}}F(x:1-x^2:(2m+1) = \text{tang}\, x$$

für jeden rationalen Werth von x irrational ist, da man immer an einen Werth von m kommt, von welchem an gerechnet die Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind. Hieraus folgt, dafs die Tangente eines Bogens immer irrational sein wird, wenn dieser rational ist. Es mufs daher auch nothwendig die Zahl, welche das Verhältnifs der Peripherie zum Halbmesser angiebt, irrational sein, denn wäre dieses, oder 2π, also auch $\frac{\pi}{4}$ rational, so müfste tang $\frac{\pi}{4}$ irrational sein; diese Tangente ist aber bekanntlich rational und dem Halbmesser gleich. Eben so wenig kann das Quadrat dieses Verhältnisses rational sein, denn wäre $4\pi^2$ oder π^2 rational, allenfalls $\pi^2 = \frac{m}{n}$, wo m, n rationale Zahlen sind, so hätte man

$$2 = \cfrac{m:n}{6 - \cfrac{m:n}{10 - \cfrac{m:n}{14} \text{ etc.}}} = \cfrac{m}{6n - \cfrac{m}{10 - \cfrac{m}{14n} \text{ etc.}}}$$

Dieser letzte Kettenbruch wäre aber offenbar irrational, und könnte daher unmöglich $= 2$ sein, folglich mufs π^2 irrational sein *).

IV. Sind alle Theilzähler negativ, die Theilnenner positiv, so wird der Kettenbruch auch irrational sein, wenn jeder Theilzähler dem entsprechenden Theilnenner gleich, und kleiner als der nächst folgende Theilzähler ist. Denn es ist $F(a_1:a_1 - a_2:a_2 - a_3:a_3 \ldots) = F(1:1 - 1:a_1 - a_1:a_2 - a_2:a_3 \ldots)$ (§. 62.). Nach der Voraussetzung ist $a_1 < a_2$, $a_2 < a_3$, $a_3 < a_4$, also ist der Kettenbruch $F(a_1 - a_1:a_2 - a_2:a_3 \ldots)$ irrational (II.), folglich auch

*) Man vergl. Legendre *Elém. de geom. Not.* 4.

$F(1:1-1:a_1-a_2:a_3\ldots)$ oder der ihm gleiche Kettenbruch $F(a_1:a_1-a_2:a_3\ldots)$ *). Ausgenommen ist der Fall, wenn jeder Theilzähler den vorhergehenden um eine Einheit übertrifft.

65.

Auf dieselbe Weise, wie in §. 55. der Ausdruck

$$1 = F(b_1:(b_1+1) - b_2:(b_2+1) - \ldots)$$

gefunden wurde, können noch eine Menge ähnlicher Ausdrücke abgeleitet werden. So z. B. hat man

$$1 = \frac{b_1}{b_1-1+1},\quad 1 = \frac{b_2}{b_2-1+1},\quad 1 = \frac{b_3}{b_3-1+1}\ldots,$$

daher ist

$$1 = \cfrac{b_1}{b_1-1+\cfrac{b_2}{b_2-1+\cfrac{b_3}{b_3-1}}}\text{ etc.}$$

Ebenso hat man:

$$1 = m^2-(m^2-1),\quad m^2-1 = \frac{(m^2-1)^2}{2m^2-(m^2+1)},\quad m^2+1 = \frac{(m^2+1)^2}{3m^2-(2m^2-1)},$$

$$2m^2-1 = \frac{(2m^2-1)^2}{4m^2-(2m^2+1)},\quad 2m^2+1 = \frac{(2m^2+1)^2}{5m^2-(3m^2-1)}\text{ u. s. w.}$$

Substituirt man allmählich diese Werthe, so findet man

$$1 = m^2 - \cfrac{(m^2-1)^2}{2m^2-\cfrac{(m^2+1)^2}{3m^2-\cfrac{(2m^2-1)^2}{4m^2-\cfrac{(2m^2+1)^2}{5m^2}}}}\text{ etc.}$$

Den besonderen Fall, wenn $m=2$ ist, hat schon Euler auf indirectem Wege gefunden (*act. acad. petr.* 1779 *p.* 1. *pag.* 18.).

Setzt man $1 = m+1-m$, $m = \frac{m^2}{2m+1-m+1}$, $m+1 = \frac{(m+1)^2}{3m+1-2m}$,

$$2m = \frac{(2m)^2}{4m+1-(2m+1)},\quad 2m+1 = \frac{(2m+1)^2}{5m+1-3m},\ \ldots\text{ also}$$

*) Für Kettenbrüche, bei welchen die Theilzähler gröfser als die Theilnenner sind, hat man bis jetzt noch keine Merkmale gefunden, wodurch ihre Rationalität oder Irrationalität erkannt werden könnte; blos für einzelne Fälle wird später ein solches vorkommen. Ich glaube aber, dafs man mit Sicherheit den Satz aufstellen kann: Wenn in einem Kettenbruche nur positive Zeichen vorkommen, und die Theilzähler werden im Verhältnifs zu den ihnen entsprechenden Theilnennern immer gröfser, so ist der Kettenbruch irrational: wenigstens stimmen alle mir bekannten Beispiele hiermit überein. Könnte man diesen Satz zur Gewifsheit erheben, so wäre es leicht, vermöge der Formel (11.) des Kap. 3. darzuthun, dafs jede Potenz von π irrational ist.

$$1 = m + 1 - \cfrac{m^2}{2m+1 - \cfrac{(m+1)^2}{3m+1 - \cfrac{(2m)^2}{4m+1 - \cfrac{(2m+1)^2}{5m+1}}}} \text{ etc.}$$

Den besonderen Fall, wenn $m = 2$ ist, hat schon **Euler** auf indirectem Wege gefunden (*Act. ac. petr.* 1782 *p.* 2. *pag.* 73.).

Setzt man $1 = \frac{1.2}{3-1}$, $1 = \frac{1.2}{5-3}$, $3 = \frac{3.4}{7-3}$, $3 = \frac{3.4}{9-5}$, $5 = \frac{5.6}{11-5}\ldots$, so findet man:

$$1 = \cfrac{1.2}{3 - \cfrac{1.2}{5 - \cfrac{3.4}{7 - \cfrac{3.4}{9 - \cfrac{5.6}{11}}}}} \text{ etc.}$$

oder setzt man:

$1 = \frac{4}{5-1}$, $1 = \frac{1.2}{7-5}$, $5 = \frac{5.6}{9-3}$, $3 = \frac{3.4}{11-7}$, $7 = \frac{7.8}{13-5}$, $5 = \frac{5.6}{15-9}\ldots$, so ist

$$1 = \cfrac{4}{5 - \cfrac{1.2}{7 - \cfrac{5.6}{9 - \cfrac{3.4}{11 - \cfrac{7.8}{13 - \cfrac{5.6}{15}}}}}} \text{ etc.}$$

Die zwei letzten Resultate wurden schon §. 48. auf indirectem Wege gefunden.

Ein hierher gehörender Kettenbruch möge noch besonders erwähnt werden, weil ihn **Euler** aus sehr verwickelten Betrachtungen abgeleitet hat (*Opusc. anal. T. I. pag.* 117.). Man setze:

$$\alpha = \frac{(\beta+\delta)\alpha}{\beta+\delta-(\alpha+\gamma)+(\alpha+\gamma)}, \quad \alpha+\gamma = \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+2\delta)}{\beta+2\delta-(\alpha+2\gamma)+(\alpha+2\gamma)},$$

$$\alpha+2\gamma = \frac{(\alpha+2\gamma)(\beta+3\delta)}{\beta+3\delta-(\alpha+3\gamma)+(\alpha+3\gamma)} \text{ u. s. w.,}$$

so findet man

$$\alpha = \cfrac{\alpha(\beta+\delta)}{\beta+\delta-(\alpha+\gamma)+\cfrac{(\alpha+\gamma)(\beta+2\delta)}{\beta+2\delta-(\alpha+2\gamma)+\cfrac{(\alpha+2\gamma)(\beta+3\delta)}{\beta+3\delta-(\alpha+3\gamma)}}} \text{ etc. *)}$$

*) Auch **Trembley**, der nach **Euler** den Werth dieses Kettenbruchs mit Hülfe der recurrirenden Reihen gefunden hat (*Nouv. Mém. de l'ac. de Berlin*), hat die einfache Entstehung desselben nicht bemerkt. Man kann, ganz auf dieselbe Weise, auch die verwickelteren Ausdrücke, die er dort (§. 22.) aufstellt, ableiten.

Auch die Art und Weise, wie in §. 62. aus $\frac{m-1}{m-2}$ der Kettenbruch

$$F[m:m-(m+1):(m+1)\ldots.]$$

abgeleitet wurde, kann oft mit Nutzen zur Auffindung von Kettenbrüchen angewandt werden. So z. B. hat man $\frac{m+1}{m}=\frac{m}{m-2+\frac{m+2}{m+1}}$; hieraus folgt

$\frac{m+2}{m+1}=\frac{m+1}{m-1+\frac{m+3}{m+2}}$, $\frac{m+3}{m+2}=\frac{m+2}{m+\frac{m+4}{m+3}}$ etc., folglich ist

$$\frac{m+1}{m}=\cfrac{m}{m-2+\cfrac{m+1}{m-1+\cfrac{m+2}{m+\cfrac{m+3}{m+1}\text{ etc.}}}}\text{ *)}.$$

Dieser letztere Kettenbruch ist aber als besonderer Fall in einer viel allgemeineren Form enthalten, die nun behandelt werden soll.

66.

Es soll nemlich die Summe des unendlichen Kettenbruchs **)

$$1.\quad m+\cfrac{n}{m+1+\cfrac{n+1}{m+2+\text{ etc.}}}$$

gefunden werden. Es wird zuerst vorausgesetzt, dafs m und n beide positiv und ganze Zahlen sind. Wäre n negativ, so würde der Kettenbruch abbrechen, und in einen endlichen übergehen; auch wird die Untersuchung hier auf den Fall eingeschränkt, wenn $n \geqq m+2$ ist. Ist $n<m+2$, so ist der Kettenbruch irrational (§. 64., II.). Dieser Fall soll erst später untersucht werden. Man bezeichne den Werth des Kettenbruchs (1.) durch $f(m,n)$, und setze

$$m-1+\frac{n-1}{f(m,n)}=a_1,\quad m-2+\frac{n-2}{a_1}=a_2,\quad m-3+\frac{n-3}{a_2}=a_3,\ \ldots.$$
$$m-s+\frac{n-s}{a_{s-1}}=a_s,$$

*) Die hier erwähnten Kettenbrüche können auch dazu dienen, die Meinung, die man hin und wieder ausgesprochen findet, dafs ein unendlicher Kettenbruch keinen rationalen Werth haben kann, zu widerlegen.

**) Die Methode, die Euler zur Summirung der Kettenbrüche angewendet hat (*Opusc. anal. T.* I. *pag.* 85.), ist sehr verwickelt. Man vergleiche auch einen Aufsatz von Euler in den *Mém. de l'ac. de Petersb.* (*T. IV. pag.* 52.), und einen anderen von Trembley (*Mém. de l'ac. de Berl.* 1794).

so ist

$$f(m,n) = \frac{n-1}{-m+1+a_1}, \quad a_1 = \frac{n-2}{-m+2+a_2}, \quad \dots \quad a_{s-1} = \frac{n-s}{-m+s+a_s},$$

folglich

$$2. \quad f(m,n) = \cfrac{n-1}{-m+1+\cfrac{n-2}{-m+2+\cfrac{n-3}{-m+3 \text{ etc.}}}}$$

Dieser zweite Kettenbruch bricht in jedem Falle ab, wie grofs auch n sei, denn setzt man ihn weit genug fort, so wird man an die Form

$$\cfrac{n-n}{-m+n+\cfrac{n-(n+1)}{-m+n+1+\cfrac{n-(n+2)}{-m+n+2 \text{ etc.}}}}$$

kommen, welche, wenn man $n=m+r+1$ setzt, in

$$\cfrac{0}{r+1-\cfrac{1}{r+2-\cfrac{2}{r+3 \text{ etc.}}}}$$

übergeht. Dieser letztere Bruch ist aber wirklich $=0$, weil der Nenner $r+1-\frac{1}{r+2 \text{ etc.}}$ nicht Null, sondern vielmehr gröfser als r ist (§. 55.) und (§. 22.). Da nun der Kettenbruch (1.) convergirt (§. 54.), und der Kettenbruch (2.) endlich ist, und der letztere Kettenbruch, wie man sogleich sehen wird, ebensowohl wie der erste, einen positiven Werth hat, so sind diese beiden Formen identisch; es ist daher $f(m,n)$ durch die Form (2.) auf einen endlichen Kettenbruch zurückgeführt, und man kann hiernach seine Summe als schon gefunden ansehn. Eine genauere Betrachtung der Form (2.) führt aber zu sehr interessanten Bemerkungen. Setzt man in derselben statt m den Werth $n-(r+1)$, so geht sie in folgende über:

$$\cfrac{n-1}{r+2-n+\cfrac{n-2}{r+3-n+\cdots+\cfrac{3}{r-2+\cfrac{2}{r-1+\cfrac{1}{r}}}}}.$$

Je nachdem $n=2,3,4,\dots$ ist, ist daher der Werth von $f(m,n)=$

$$\frac{1}{r}, \quad \cfrac{2}{r-1+\cfrac{1}{r}}, \quad \cfrac{3}{r-2+\cfrac{2}{r-1+\cfrac{1}{r}}}, \quad \dots$$

Die Reihe, deren Glieder diese auf einander folgende Kettenbrüche sind, nenne man ($A.$). Reducirt man diese Brüche, so findet man

$$\frac{1}{r}, \quad \frac{2r}{r(r-1)+1}, \quad \frac{3[r(r-1)+1]}{r(r-1)(r-2)+(r-2)+2r}, \quad \ldots\ldots$$

Es ist leicht einzusehen, daſs der Zähler des l^{ten} Bruches aus dieser Reihe das $l$fache des Nenners des vorhergehenden ist. Das Gesetz, nach welchem die Nenner gebildet werden, findet man aber auf folgende Weise. Man nehme an, es werde eine Reihe gebildet, deren auf einander folgende Glieder die Nenner r, $r(r-1)+1$, u. s. w. sind. Diese Reihe nenne man ($B.$). Es sei nun das $n-1^{te}$ Glied der Reihe ($A.$) $= \frac{p'}{q'}$, das n^{te} $= \frac{p}{q}$, so ist das $n+1^{te} = \frac{n+1}{r-n+\frac{r}{q}} = \frac{(n+1)q}{(r-n)q+p}$, oder, da $p = nq'$ ist, $= \frac{(n+1)q}{(r-n)q+nq'}$, das $n+1^{te}$ Glied der Reihe ($B.$) ist daher $(r-n)q+nq'$.

Ist nun das $n-1^{te}$ Glied dieser Reihe

$$= 1+(n-1)(r-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.(r-1)(r-2)+\ldots.$$

und das n^{te}

$$= 1+n.(r-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}.(r-1)(r-2)+\ldots.,$$

so ist auch das $n+1^{te}$

$$= 1+(n+1)(r-1)+\frac{(n+1)n}{1.2}.(r-1)(r-2)+\ldots.,$$

denn unter dieser Voraussetzung ist das $n+1^{te}$ Glied

$$= n\left[1+(n-1)(r-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(r-1)(r-2)\ldots.\right]$$
$$+(r-n)\left[1+n(r-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-1)(r-2)\ldots.\right],$$

ferner ist

$$(r-n-1)\left[1+n(r-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-1)(r-2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r-1)(r-2)(r-3)+\ldots.\right]$$
$$+n\left[1+(n-1)(r-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(r-1)(r-2)+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}(r-1)(r-2)(r-3)+\ldots.\right]$$
$$= (r-1)\left[1+n[(r-n-1)+(n-1)]+\frac{n(n-1)}{1.2}[(r-n-1)(r-2)+(n-2)(r-2)]\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.3.3}[(r-n-1)(r-2)(r-3)+(n-3)(r-2)(r-3)]+\ldots.\right]+\ldots.$$
$$= (r-1)\left[1+n(r-2)+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-2)(r-3)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r-2)(r-3)(r-4)+\ldots.\right],$$

folglich ist das $n+1^{te}$ Glied der Reihe ($B.$):

$$3.\quad \begin{cases} 1+n(r-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-1)(r-2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r-1)(r-2)(r-3)+\ldots. \\ +\quad r-1+\quad n\,(r-1)\,(r-2)+\frac{n(n-1)}{1.2}\,(r-1)(r-2)(r-3)+\ldots. \end{cases}$$
$$=1+(n+1)(r-1)+\frac{(n+1)n}{1.2}(r-1)(r-2)+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(r-1)(r-2)(r-3)+\ldots.$$

Setzt man $n=2$, so ist das $n-1^{\text{te}}$ Glied $=r=1+(2-1)(r-1)$, das n^{te} $=r(r-1)+1=1+(3-1)(r-1)+\frac{2.1}{1.2}(r-1)(r-2)$. Da also auf diese zwei Glieder die hypothetisch angenommene Form wirklich pafst, so gilt sie auch für alle folgende, d. h. die Form. (3.) ist allgemein gültig.

Setzt man statt r seinen Werth $n-m-1$, und schreibt zugleich statt
$$\frac{(n-m-2)(n-m-3)\ldots.(n-m-t)}{1.2\ldots.t}$$
das Zeichen ${}^{n-m-2}\overset{t}{\mathfrak{B}}$, so ist das $n-2^{\text{te}}$ Glied der Reihe ($B.$)
$$=1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-2)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-2)(n-3)+\ldots.,$$
das $n-1^{\text{te}}$ Glied
$$=1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+\ldots..$$
Nun ist $f(m,n)$ das $n-1^{\text{te}}$ Glied der Reihe ($A.$), man hat daher
$$4.\quad f(m,n)=\frac{(n-1)[1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-2)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-2)(n-3)+\ldots.]}{1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+\ldots.}.$$
Ist z. B. $m=n-3$, so ist
$$f(n-3,n)=\frac{(n-1)(1+n-2)}{1+n-1}=\frac{(n-1)^2}{n}=n-3+\cfrac{n}{n-2+\cfrac{n+1}{n-1\text{ etc.}}},$$
folglich $\cfrac{n}{n-2+\cfrac{n+1}{n-1}}=\frac{(n-1)^2}{n}-(n-3)=\frac{n+1}{n}$, wie schon früher (§. 65.) gefunden wurde.

Will man den Werth von $f(m,n+1)=m+\cfrac{n+1}{m+1+\cfrac{n+2}{m+2\text{ etc.}}}$ wissen, so kann man ihn zwar geradezu aus Formel (4.) finden. Es ist nemlich
$$f(m,n+1)=\frac{n[1+{}^{n-m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)+{}^{n-m-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+\ldots.]}{1+{}^{n-m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}.n+{}^{n-m-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}.n.(n-1)+\ldots.}.$$
Man kann ihn aber auch aus dem Werthe von $f(m,n)$ ableiten.

Setzt man nemlich $f(m,n)=\frac{p}{q}$, $f(m,n+1)=\frac{P}{Q}$, so hat man

$$p = n-1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)(n-3)+\ldots.$$
$$q = \quad 1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1) \qquad +{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+\ldots.$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder zusammen, und bedenkt zugleich, daſs allgemein

$${}^{s}\overset{r}{\mathfrak{B}}+{}^{s}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}={}^{s+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}$$

ist, so hat man

$$p+q = 1+{}^{n-m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)+{}^{n-m-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2) \text{ etc.} = \frac{P}{n}.$$

Ferner ist

$$(n-m)q = [1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+\ldots.]\times(n-m)$$

oder $(n-m)q =$

$$1+n-m-1+(n-m-1)(n-m-2)(n-1)+\frac{(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{1.2}(n-1)(n-2)+\ldots.$$
$$+ \qquad (n-m-2)(n-1)+\frac{(n-m-2)(n-m-3)}{1.2}(n-1)(n-2)+\ldots.,$$

folglich $(n-m)q+p =$

$$\begin{cases} 1+{}^{n-m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}} \qquad +2.{}^{n-m-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1) \quad +3.{}^{n-m-1}\overset{3}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2) \quad +\ldots. \\ +{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+{}^{n-m-2}\overset{3}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)(n-3)+\ldots. \\ + \qquad n-1+{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)+{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)(n-3)+\ldots. \end{cases}$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder, und bedenkt, daſs

$$n-m-1+\frac{(n-m-(l+1))}{l}(n-l)+(n-l) = \frac{(n-m-1)n}{l}$$

ist, so findet man:

$$(n-m)q+p = 1+{}^{n-m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}.n+{}^{n-m-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}n(n-1)+\ldots. = Q,$$

also

$$\frac{P}{Q} = \frac{n(p+q)}{(n-m)q+p} = \frac{n\left(\frac{p}{q}+1\right)}{\frac{p}{q}+n-m},$$

oder

$$5. \qquad f(m,n+1) = \frac{n[f(m,n)+1]}{f(m,n)+n-m} \; ^{*)}.$$

Man kann auch aus $f(m,n)=\frac{p}{q}$ den Werth von $f(m-1,n)=\frac{p'}{q'}$ ableiten. Es ist nemlich

---

*) Ist $m=1$, so hat man

$$f(m,n+1) = \frac{n[f(m,n)+1]}{f(m,n)+n-1}.$$

Diese Formel hat schon *Euler* gefunden (*Op. an. T.* 1. *pag.* 88).

$$\frac{m\cdot p}{n-1} = \qquad m + m\,{}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-2) + m.\,{}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-2)(n-3) \text{ etc.}$$

$$q \;= 1 + {}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1) + {}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2) + {}^{n-m-2}\overset{3}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)(n-3) \text{ etc.}$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder zusammen, und bemerkt zugleich, dafs

$$m + \frac{(n-m-(l+1))(n-1)}{l} = \frac{(n-m-1)(n-(l+1))}{l}$$

ist, so findet man

$$\frac{m.p}{n-1} + q = 1 + {}^{n-m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-2) + {}^{n-m-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-2)(n-3)\ldots.$$

Aus Formel (4.) folgt aber

$$p' = (n-1)[1 + {}^{n-m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-2) + {}^{n-m-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-2)(n-3)\ldots.] = mp + (n-1)q.$$

Ferner ist, wie schon früher bewiesen wurde, $q' = p + q$, folglich

$$\frac{p'}{q'} = \frac{mp+(n-1)q}{p+q},$$

oder

$$6.\quad f(m-1,n) = \frac{m.f(m,n)+n-1}{f(m,n)+1}.$$

Man kann den Werth von $f(m-1, n)$ noch leichter auf folgende Weise finden: Es ist

$$f(m-1,n) = m-1+\frac{n}{f(m,n+1)},$$

aber

$$f(m,n+1) = \frac{n[f(m,n)+1]}{f(m,n)+n-m},$$

folglich

$$f(m-1,n) = \frac{mf(m,n)+n-1}{f(m,n)+1}.$$

Man setze

$$\frac{M}{N} = m+2+\cfrac{n-m-2}{m+3+\cfrac{n-m-3}{m+4 \text{ etc.}}}.$$

Wie grofs auch n ist, so kommt man hier doch immer an einen Theilzähler $n-m-s$, der $=0$ ist, wenn man nemlich $n-m=s$ setzt. Es kann aber hier wieder wie bei der Formel (2.) gezeigt werden, dafs der Ausdruck, durch welchen dieser Theilzähler Null dividirt wird, nicht Null ist; der Kettenbruch (8.) bricht also ab, und ist endlich. Setzt man allmählich $n=2, =3, =4, \ldots$, so erhält man bezüglich

$$\frac{M}{N} = \frac{m+2}{1},\quad = \frac{(m+2)(m+3)+1}{m+3},\quad = \frac{(m+2)[(m+3)(m+4)+1]+2(m+4)}{(m+3)(m+4)+1}\ldots,$$

und wenn man hier wieder das Gesetz, nach welchem die Zähler und Nenner gebildet werden, untersucht, so findet man auf ähnliche Weise, wie die Formel (4.) gefunden wurde:

$$M = 1 + {}^{n-m-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1) + {}^{n-m-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2) + {}^{n-m-1}\overset{3}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)(n-3) + \ldots.$$

$$N = 1 + {}^{n-m-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}(n-1) + {}^{n-m-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2) + {}^{n-m-2}\overset{3}{\mathfrak{B}}(n-1)(n-2)(n-3) + \ldots.$$

Zieht man die unter einander stehenden Glieder von einander ab, so findet man $M - N = p$; auch ist $N = q$, also

$$\frac{M}{N} = \frac{q}{p} + 1,$$

folglich

$$9. \quad f(m,n) = m + 1 + \cfrac{n-m-2}{m+3+\cfrac{n-m-3}{m+4+}} \text{ etc.}$$

Auf dieselbe Weise, wie der Ausdruck (1.) und (2.) verwandelt wurde, kann man auch den Ausdruck (8.) verwandeln. Man findet alsdann

$$\frac{M}{N} = \cfrac{n-m-1}{-m-1+\cfrac{n-m}{-m+\cfrac{n-m+1}{-m+1}}} \text{ etc.}$$

und

$$10. \quad f(m,n) = -1 + \cfrac{n-m-1}{-m-1+\cfrac{n-m}{-m+\cfrac{n-m+1}{-m+1}}} \text{ etc.}$$

Zur Berechnung des Werthes von $f(m,n)$ ist der Ausdruck (9.) am tauglichsten, weil er am frühesten abbricht*).

Man hätte die Untersuchung noch allgemeiner halten können, wenn man statt des Kettenbruchs (1.) den Kettenbruch

$$11. \quad m + \cfrac{n}{m+\Delta+\cfrac{n+\Delta}{m+2\Delta+\cfrac{n+2\Delta}{m+3\Delta}}} \text{ etc.}$$

zu Grunde gelegt hätte, wo m, n, Δ ganze positive Zahlen bedeuten, und $n > m + \Delta$, ferner $\frac{n}{\Delta}$ eine ganze Zahl sein soll. Aus diesem convergirenden Kettenbruche kann man wieder den gleichgeltenden endlichen $\cfrac{n-\Delta}{-(m-\Delta)+\cfrac{n-2\Delta}{-(m-2\Delta)+}}$ etc. erhalten. Hieraus folgt der bemerkenswerthe Satz: Wenn Zähler und Nenner aller Theilbrüche eines unendlichen Ket-

*) Die Identität der vier Kettenbrüche (1.), (2.), (9.), (10.) hat Euler (*Op. anal.* T. 1. *pag.* 102) auf ganz anderem Wege gefunden.

tenbruchs positiv, und um dieselbe Gröfse verschieden sind, so wird dieser Kettenbruch rational sein, sobald der erste Theilzähler gröfser als der dazu gehörende Theilnenner, und ein Vielfaches des Unterschiedes zweier Theilzähler ist.

67.

Die Methode, nach welcher der Kettenbruch (1.) in (2.) verwandelt wurde, darf aber nicht überall ohne weitere Untersuchung gebraucht werden, weil man sonst grofse Fehler begehen kann. So z. B. kann man aus dem Kettenbruche $S = a + \cfrac{f}{a+b+\cfrac{f+bh}{a+2b+\cfrac{f+2bh}{a+3b+\text{etc.}}}}$ den Kettenbruch $\cfrac{f-bh}{b-a+\cfrac{f-2bh}{2b-a+\cfrac{f-3bh}{3b-a\ \text{etc.}}}}$ ableiten, indem man $a-b+\frac{f-bh}{S} = a_1$, $a-2b+\frac{f-2bh}{a_1} = a_2$ u. s. w. setzt. Man darf aber darum nicht diese zwei Kettenbrüche, wie z. B. bei Euler (a. a. O.) geschehen ist, unbedingt einander gleich setzen. Setzt man z. B. $f=2$, $a=1$, $b=4$, $h=1$, so verwandelt sich der erste Kettenbruch in

$$1+\cfrac{2}{5+\cfrac{6}{9+\cfrac{10}{13\ \text{etc.},}}}$$

dagegen der zweite in

$$-\cfrac{2}{3-\cfrac{6}{7-\cfrac{10}{11\ \text{etc.}}}}$$

Der erste Kettenbruch hat also einen positiven irrationalen Werth (§. 64. II.) und ist gröfser als 1; dagegen hat der zweite Kettenbruch einen negativen irrationalen Werth, und ist kleiner als 1, da $3-\cfrac{6}{7-\cfrac{10}{11\ \text{etc.}}}$ gröfser als 2 ist (§. 55.).

68.

Ist in dem Kettenbruche (1.) die Zahl m negativ, so kann n jeden beliebigen Werth in ganzen Zahlen haben. Setzt man $m = -t$, so dafs t positiv ist, so giebt die Formel (2.):

$$\cfrac{n-1}{1+t+\cfrac{n-2}{2+t+\cfrac{n-3}{3+t\ \text{etc.}}}}$$

Setzt man $t = r + 1 - n$, so erhält man dieselbe Form wie in §. 66., nemlich:

$$\cfrac{n-1}{r+2-n+\cfrac{n-2}{r+3-n+\text{etc.}}}$$

Man kann daher die Formel (4.) ohne Weiteres auf diesen Fall anwenden, indem man in derselben statt m nun t, d. h. $-m$ setzt. Ist z. B. $n = 2$, so erhält man, vermöge dieser Formel:

$$-m+\cfrac{2}{1-m+\cfrac{3}{2-m\ \text{etc.}}} = \frac{1}{1+m},$$

wie schon **Trembley** (a. a. O. pag. 110.) durch Induction gefunden hat.

69.

Es bleibt nun noch der Fall übrig, wenn in dem Kettenbruche $f(m, n)$ die Zahl $n < m + 2$ ist (und n, m positive Zahlen sind). Um alsdann die Summe des Kettenbruchs zu finden, sind allgemeinere Untersuchungen erforderlich.

Es sei der Kettenbruch *)

$$S = \beta+b+\cfrac{(\gamma+c)(2\alpha+a)}{2\beta+b+\cfrac{(2\gamma+c)(3\alpha+a)}{3\beta+b+\cfrac{(3\gamma+c)(4\alpha+a)}{4\beta+b\ \text{etc.}}}}$$

gegeben, und es soll dessen Summe (wenn überhaupt eine solche möglich ist) gefunden werden. Man denke sich eine Reihe von Gröfsen A, A_1, A_2, A_3, ..., die so beschaffen sind, dafs

$$(\alpha+a)A = (\beta+b)A_1 + (\gamma+c)A_2,$$
$$(2\alpha+a)A_1 = (2\beta+b)A_2 + (2\gamma+c)A_3,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

allgemein

$$(r\alpha+a)A_{r-1} = (r\beta+b)A_r + (r\gamma+c)A_{r+1},$$

so hat man

$$(\alpha+a)\frac{A}{A_1} = \beta+b+\frac{\gamma+c}{A_1:A_2} = \beta+b+\cfrac{(\gamma+c)(2\alpha+a)}{2\beta+b+\cfrac{(2\gamma+c)(3\alpha+a)}{A_2:A_3}}$$

u. s. w. Es wird daher $(\alpha+a)\frac{A}{A_1}$ die **Summe** des unendlichen Kettenbruchs oder nur dessen **erzeugende Function** sein, je nachdem die Ausdrücke $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{A_2}{A_3}$ u. s. w., wenigstens von einer gewissen Gränze an, vernachlässigt werden dürfen oder nicht. Es kommt nun darauf an, die

---

*) Man vergl. *Comm. ac. Petr. T. XI. p.* 59 ff. **Euleri** *Opusc. anal. T. II. p.* 198 ff.

Werthe der Gröſsen A_{r-1}, A_r, A_{r+1} zu finden, die der Gleichung

$$(r\alpha+a)A_{r-1} = (r\beta+b)A_r + (r\gamma+c)A_{r+1}$$

Genüge leisten. Die Form dieser Gröſsen ist noch völlig unbestimmt. Die bequemste Voraussetzung, die man aber machen kann, ist die, daſs sie durch bestimmte Integrale ausgedrückt sind. Man setze daher

$$A_{r-1} = \int x^{r-1}\partial y, \quad A_r = \int x^r \partial y, \quad A_{r+1} = \int x^{r+1}\partial y,$$

mit der Beschränkung, daſs diese Integrale zwischen den Gränzen $x=f$ und $x=0$ genommen werden sollen, und suche den Werth von y, der der Gleichung

$$(r\alpha+a)\int_0^f x^{r-1}\partial y = (r\beta+b)\int_0^f x^r\partial y + (r\gamma+c)\int_0^f x^{r+1}\partial y$$

genügt. Statt dieser Gleichung nehme man aber die allgemeinere:

$$(K.)\quad (r\alpha+a)\int x^{r-1}\partial y = (r\beta+b)\int x^r\partial y + (r\gamma+c)\int x^{r+1}\partial y + x^r Q,$$

wo Q eine Gröſse bedeuten soll, die für den Werth $x=f$ Null wird, so daſs der Ausdruck $x^r Q$ sowohl für den Werth $x=0$, als auch für den Werth $x=f$ verschwindet.

Differenziirt man die letzte Gleichung, so erhält man

$$(r\alpha+a)\partial y = (r\beta+b)x\,\partial y + (r\gamma+c)x^2\partial y + x\partial Q + rQ\partial x.$$

Da aber r unbestimmt bleiben soll, so theilt sich diese Gleichung in zwei andere, nemlich:

$$\alpha\partial y = \beta x\,\partial y + \gamma x^2\partial y + Q\partial x,$$
$$a\partial y = b\,x\,\partial y + c\,x^2\partial y + x\partial Q.$$

Hieraus erhält man $\dfrac{\partial Q}{Q} = \dfrac{\partial x}{x}\cdot\dfrac{a-bx-cx^2}{\alpha-\beta x-\gamma x^2}$

und $$\partial y = \frac{Q\partial x}{\alpha-\beta x-\gamma x^2} = \frac{x\partial Q}{a-bx-cx^2},$$

also $$A = \int_0^f \frac{Q\partial x}{\alpha-\beta x-\gamma x^2}, \qquad A_1 = \int_0^f \frac{Qx\partial x}{\alpha-\beta x-\gamma x^2}.$$

Der Kettenbruch S geht in den Kettenbruch (1.) des §. 66. über, wenn man $\beta=1$, $b=m-1$, $\gamma=0$, $c=1$, $\alpha=1$, $a=n-2$ setzt. In diesem besonderen Falle hat man:

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x}{x}\cdot\frac{n-2-(m-1)x-x^2}{1-x}.$$

Hieraus folgt:

$$\log Q = x + (n-2)\log x + (m+2-n)\log(1-x) + C$$

oder

$$Q = C.e^x.x^{n-2}(1-x)^{m+2-n}.$$

Q soll für einen bestimmten Werth von x Null werden. Sind daher m, n beide positiv, so muſs man zwei Fälle unterscheiden. Ist

$m+2-n$ positiv, also $n<m+2$, so wird Q für den Werth $x=1$ Null. Ist dagegen $m+2-n$ Null oder negativ, so kann Q durch keinen bestimmten Werth von x auf Null reducirt werden. Dies beweist, dafs die Form, welche hier den Gröfsen A, A_1, A_2 u. s. w. gegeben wurde, nicht auf diesen Fall pafst, und eben so verhält es sich, wenn m negativ ist. In diesen Fällen ist aber der Kettenbruch rational, und seine Summe ist schon früher gefunden worden. Ist $n<m+2$, so hat man:

$$A=\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m+1-n}\partial x, \qquad A_1=\int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m+1-n}\partial x,$$

und es ist

$$(L.)\quad f(m,n)=(n-1)\cdot\frac{\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m+1-n}\partial x}{\int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m+1-n}\partial x},$$

vorausgesetzt, dafs der irgendwo vernachläfsigte Ausdruck $\frac{A_{m-1}}{A_m}$ keinen nachtheiligen Einflufs auf das Resultat ausüben kann. Die allgemeine Form dieses vernachlässigten Ausdrucks ist:

$$\frac{\int_0^1 e^x . x^s\ (1-x)^{m+1-n}\partial x}{\int_0^1 e^x . x^{s+1}(1-x)^{m+1-n}\partial x},$$

wo s desto gröfser wird, je weiter man in der Entwickelung fortgeht. Man setze $x^s=z$, so ist

$$e^x . x^s\ (1-x)^{m+1-n}\partial x = \frac{1}{s} . e^x . z^{\frac{1}{s}}(1-x)^{m+1-n}\partial z,$$

$$e^x . x^{s+1}(1-x)^{m+1-n}\partial x = \frac{1}{s} . e^x . z^{\frac{2}{s}}(1-x)^{m+1-n}\partial z.$$

Das Verhältnifs dieser Differenziale ist $\frac{1}{z^{\frac{1}{s}}}$. Setzt man $s=\infty$, so ist $\frac{1}{z^{\frac{1}{s}}}=1$, das Verhältnifs dieser Differenziale nähert sich also dem Werthe 1, und dies wird daher auch bei den Integralen der Fall sein, da sie zwischen denselben Gränzen genommen werden. Daher kann man unbedenklich den unendlichen Kettenbruch als Werth von $f(m, n)$ ansehen.

Es ist zuweilen nicht möglich, aus der Formel $(L.)$ den Werth von $f(m, n)$ unmittelbar zu finden. Wäre z. B. $m=1$, $n=1$, so dafs

$$f(m, n) = F(1+1:2+2:3+ \text{etc.})$$

wäre, so hätte man $n-1=0$, und die Formel $(L.)$ wäre daher unbrauchbar. Man suche aber den Werth von $F(2+2:3+3:4$ etc.), alsdann ist $m=2$, $n=2$, daher wird

$$f(m, n) = \frac{\int_0^1 e^x (1-x) \partial x}{\int_0^1 e^x . x(1-x) \partial x} = \frac{e-2}{3-e},$$

und

$$F(1+1:2+2:3 \dots) = 1 + \frac{1}{\frac{e-2}{3-e}} = \frac{1}{e-2};$$

oder hätte man $f(m, n) = F(1+1:1+2:2+3:3$ etc.), so suche man zuerst den Werth von $F(1+2:2+3:3$ etc.). Man setze also $m=1$, $n=2$, so ist

$$f(m, n) = \frac{\int_0^1 e^x \partial x}{\int_0^1 e^x . x \partial x} = \frac{e-1}{1},$$

und

$$F(1+1:1+2:2 \text{ etc.}) = 1 + \frac{1}{e-1} = \frac{e}{e-1}.$$

Setzt man $\beta = 1$, $b = m-2$, $\gamma = 0$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $a = n-2$, so geht S in $f(m-1, n)$ über, und man kann daher den Werth dieses Kettenbruchs, ebenso wie den von $f(m, n)$ finden. Es ist

$$f(m-1, n) = \frac{(n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n} \partial x}{\int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n} \partial x}.$$

Man kann aber auch zwischen $f(m-1, n)$ und $f(m, n)$ einen Zusammenhang finden, so dafs es möglich ist, den Werth eines dieser Kettenbrüche aus dem des anderen abzuleiten, und zwar ist dieser Zusammenhang derselbe, wie der früher (§. 67., Form. 6.) gefundene. Man setze:

$$(n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n} \partial x = p', \quad \int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n} \partial x = q',$$

$$(n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n+1} \partial x = p, \quad \int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n+1} \partial x = q,$$

so ist $p' - (n-1)q' = (n-1)\left[\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n} \partial x - \int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n} \partial x\right]$ $= (n-1)\left[\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n+1} \partial x\right] = p$, ferner folgt aus ($K$.), wenn man $r=1$, $\beta = 1$, $b = m-2$, $\gamma = 0$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $a = n-2$ setzt:

$$(n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n} \partial x = (m-1)\int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n} \partial x + \int_0^1 e^x . x^n (1-x)^{m-n},$$

oder

$$m\int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n} \partial x - (n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n} \partial x = \int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m+1-n},$$

d. h.,

$$mq' - p' = q,$$

also
$$\frac{p}{q} = \frac{p' - (n-1)q'}{mq' - p'},$$

d. h.
$$(M.) \quad f(m,n) = \frac{f(m-1,n) - (n-1)}{m - f(m-1,n)}.$$

Da $f(m, n-1) = m + \cfrac{n-1}{m+1+\cfrac{n}{m+2 \text{ etc.}}} = m + \frac{n-1}{f(m+1,n)}$ ist, $f(m+1, n)$ aber nach $(M.)$ aus $f(m,n)$ gefunden werden kann, so ist es auch leicht, den Zusammenhang zwischen $f(m,n)$ und $f(m, n-1)$ anzugeben.

70.

Der Kettenbruch $S = m - \cfrac{n}{m+1-\cfrac{(n+1)}{m+2-\cfrac{(n+2)}{m+3 \text{ etc.}}}} = \varphi(m,n)$ (wo m, n wieder ganze positive Zahlen sind) kann ebenfalls nach der in den früheren §. §. angewandten Methode summirt werden. Man mufs wieder zwei Fälle unterscheiden. Ist $n < m$, so ist der Kettenbruch irrational, ist aber $n \overline{\overline{>}} m$, so setze man $m - 1 - \frac{(n-1)}{S} = a_1$, $m - 2 - \frac{(n-2)}{a_1} = a_2$, u. s. w. Alsdann ist
$$S = \cfrac{n-1}{m-1-\cfrac{(n-2)}{m-2-\cfrac{(n-3)}{m-3 \text{ etc.}}}}$$

Dieser Bruch bricht ab und ist endlich; hierdurch ist also die Summe von S gefunden.

Setzt man $m = n$, so hat man
$$m - \cfrac{m}{m+1-\cfrac{(m+1)}{m+2-\cfrac{(m+2)}{m+3 \text{ etc.}}}} = \cfrac{m-1}{m-1-\cfrac{(m-2)}{m-2-\cfrac{(m-2)}{m-3 \text{ etc.}}}},$$

folglich
$$\cfrac{m-1}{m-1-\cfrac{(m-2)}{m-2-\cfrac{(m-3)}{m-3 \text{ etc.}}}} = m-1 \quad \text{(vergl. §. 62.).}$$

Dieses Resultat hätte man auch direct finden können, denn es ist
$$1 = m - 1 - \cfrac{(m-2)}{m-2-\cfrac{(m-3)}{1}}, \quad 1 = m - 3 - \cfrac{(m-4)}{m-4-\cfrac{(m-5)}{1}} \text{ u. s. w.,}$$

folglich
$$1 = m - 1 - \cfrac{(m-2)}{m-2-\cfrac{(m-3)}{m-3-\cfrac{(m-4)}{m-4 \text{ etc.}}}}$$

Ist $n < m$, so findet man den Werth des Kettenbruchs nach §. 69. Setzt man nemlich in der Formel ($K.$):

$$r = 1,\ \beta = 1,\ b = m-1,\ \gamma = 0,\ c = -1,\ \alpha = 1,\ a = n-2,$$

so hat man
$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x}{x}\cdot\frac{n-2-(m-1)x+x^2}{1-x},$$
$$Q = e^{-x}.x^{n-2}(1-x)^{m-n}.$$

Dieser Ausdruck wird für den Werth $x = 1$ Null, sobald $n < m$ ist, also ist

$$S = \frac{(n-1)\int_0^1 e^{-x}.x^{n-2}(1-x)^{m-n-1}\partial x}{\int_0^1 e^{-x}.x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\partial x} = \varphi(m, n).$$

Dafs der Rest vernachlässigt werden kann, läfst sich hier wieder wie in §. 69. zeigen. Ist z. B. $n = 2$, $m = 3$, so hat man

$$3 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{3}{5\ \text{etc.}}} = \frac{\int_0^1 e^{-x}\partial x}{\int_0^1 e^{-x}.x\partial x} = \frac{e-1}{e-2}.$$

Aus dem Werthe von $\varphi(m, n)$ folgt

$$\varphi(m+1, n) = \frac{(n-1)\int_0^1 e^{-x}.x^{n-2}(1-x)^{m-n}\partial x}{\int_0^1 e^{-x}.x^{n-1}(1-x)^{m-n}\partial x}.$$

Setzt man

$$(n-1)\int_0^1 e^{-x}.x^{n-2}(1-x)^{m-n-1}\partial x = p,$$
$$\int_0^1 e^{-x}.x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\partial x = q,$$
$$(n-1)\int_0^1 e^{-x}.x^{n-2}(1-x)^{m-n}\partial x = p',$$
$$\int_0^1 e^{-x}.x^{n-1}(1-x)^{m-n}\partial x = q',$$

so ist
$$p-(n-1)q = p',$$

Ferner folgt aus ($K.$):

$$(n-1)\int e^{-x}.x^{n-2}(1-x)^{m-n-1}\partial x = m\int e^{-x}.x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\partial x - \int e^{-x}.x^{n}(1-x)^{m-n-1}\partial x,$$

oder

$$(n-1)\int e^{-x}.x^{n-2}(1-x)^{m-n-1}\partial x - (m-1)\int e^{-x}.x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\partial x$$
$$= \int e^{-x}.x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\partial x - \int e^{-x}.x^{n}(1-x)^{m-n-1}\partial x = \int e^{-x}.x^{n-1}(1-x)^{m-n}\partial x,$$

d. h.
$$p-(m-1)q = q',$$

also
$$\frac{p'}{q'} = \frac{p-(n-1)q}{p-(m-1)q} \quad \text{oder} \quad \varphi(m+1, n) = \frac{\varphi(m, n)-(n-1)}{\varphi(m, n)-(m-1)}.$$

Dasselbe Verhältnifs findet aber auch Statt, wenn $n>m$ ist. Ist z. B. $m=0$, $n=4$, so ist $S=\frac{15}{1}$; ist $m=1$, $n=4$, so ist $S=\frac{3}{4}$; ist $m=2$, $n=4$, so ist $S=\frac{3}{-1}$; ist $m=3$, $n=4$, so ist $S=\frac{3}{2}$, und man hat $\frac{3}{4}=\frac{15-3}{15+1}$, $\frac{-3}{1}=\frac{\frac{3}{4}-3}{\frac{3}{4}}$, $\frac{3}{2}=\frac{-3-3}{-3-1}$. Jedoch ist es hier nicht so leicht, wie bei einem früheren Falle (§. 66.), einen elementaren Beweis dieses Verhältnisses zu geben.

Es ist hier auch wieder leicht, einen Zusammenhang zwischen $\varphi(m, n-1)$ und $\varphi(m,n)$ zu finden, denn es ist

$$\varphi(m, n-1) =$$
$$m-\frac{n-1}{\varphi(m+1,n)}=m-\frac{(n-1)[\varphi(m,n)-(m-1)]}{\varphi(m,n)-(n-1)}=\frac{(m-n+1)\varphi(m,n)-(n-1)}{\varphi(m,n)-(n-1)}.$$

Der Kettenbruch

$$m-\cfrac{n}{m+\Delta-\cfrac{(n+\Delta)}{m+2\Delta-\cfrac{(n+2\Delta)}{m+3\Delta \text{ etc.}}}}$$

würde sich unter der Voraussetzung, dafs $n \overline{\overline{>}} m+\Delta-1$ ist, und m, n, Δ ganze Zahlen sind, in den endlichen Kettenbruch

$$\cfrac{n-\Delta}{m-\Delta-\cfrac{(n-2\Delta)}{m-2\Delta-\cfrac{(n-3\Delta)}{m-3\Delta \text{ etc.}}}}$$

verwandeln, sobald Δ ein Factor von n ist. In diesem Falle ist daher der Kettenbruch rational.

71.

Aus dem Kettenbruche S (§. 69.) läfst sich die Summe einer unzähligen Menge von Kettenbrüchen ableiten. Hier sollen nur einige hervorgehoben werden, die schon früher auf anderem Wege gefunden wurden. Es sei der Ausdruck $n+\cfrac{m^2}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(m+2n)^2}{n \text{ etc.}}}}$ gegeben. Man setze

$\gamma+c=m$, $2\alpha+a=m$, $\gamma=n$, $\alpha=n$, $\beta=0$, $b=n$, so ist

$$\frac{\partial Q}{Q}=\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{m-2n-nx-(m-n)x^2}{n(1-x^2)};$$

ist $n=2$, $m=3$, so hat man

$$\frac{\partial Q}{Q} = -\frac{\partial x(1+2x+x^2)}{2x(1-x^2)} = -\frac{\partial x(1+x)}{2x(1-x)} \quad \text{und} \quad Q = \frac{1-x}{\sqrt{x}},$$

also ist für den Werth $x = 1$, $Q = 0$, folglich

$$A = \int_0^1 \frac{(1-x)\partial x}{2(1-x^2)\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} = \text{arc tang } 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{x(1-x)\partial x}{2(1-x^2)\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}.\partial x}{1+x} = 1 - \text{arc tang } 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

und

$$2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 \text{ etc.}}} = \frac{A}{A_1} = \frac{\pi}{4-\pi},$$

folglich

$$2 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \text{etc.}}} = 1 + \frac{4}{\pi} \quad \text{(vergl. §. 33.).}$$

Ist $n = 1$, $m = 2$, so hat man $\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x}{x} . \frac{-(x+x^2)}{1-x^2} = \frac{-\partial x}{1-x}$, also $Q = 1 - x$. Dieser Werth wird wieder Null für den Werth $x = 1$, daher ist

$$A = \int_0^1 \frac{(1-x)\partial x}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{1+x} = \log 2,$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{x\partial x}{1+x} = 1 - \log 2,$$

folglich

$$1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{3^2}{1 \text{ etc.}}} = \frac{\log 2}{1 - \log 2} \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{3^2}{1 \text{ etc.}}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\log 2}{1 - \log 2}}} = \log 2$$

(vergl. §. 28.).

Setzt man $\beta = 2$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $a = 0$, $c = 1$, so erhält man den Kettenbruch $3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 \text{ etc.}}}}$. Hier ist $\frac{\partial Q}{Q} = \frac{-\partial x(1+x)}{2-(1+x)^2}$ und $Q = [2-(1+x)^2]^{\frac{1}{2}}$. Soll Q Null werden, so mufs $2 = 1 + x^2$ sein, oder $x = -1 \pm \sqrt{2}$, also $A = \int_0^{-1 \pm \sqrt{2}} \frac{[2-(1+x)^2]^{\frac{1}{2}}\partial x}{2-(1+x)^2} = \frac{\partial x}{\sqrt{(2-(1+x)^2)}}$. Nun ist $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(2-(1+x)^2)}} = \text{arc tang} \sqrt{\left(\frac{(1+x)^2}{2-(1+x)^2}\right)}$, folglich $A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Eben so findet man $A_1 = \int_0^{-1 \pm \sqrt{2}} \frac{x\partial x}{\sqrt{(2-(1+x)^2)}} = 1 - \frac{\pi}{4}$, also $\frac{A}{A_1} = \frac{\pi}{4-\pi}$ und

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2^2}{5 \text{ etc.}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{4-\pi}{\pi}} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(§. 47.).}$$

72.

Um nun auch ein Beispiel zu geben, wo $(\alpha+a)\frac{A}{A_1}$ nicht die Summe, sondern nur die erzeugende Function ist, möge die Summe des Kettenbruchs

$$(F.)\qquad n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n\ \text{etc.}}}$$

gesucht werden. Setzt man in dem Ausdrucke

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5\ \text{etc.}}}}\qquad(\S.\ 63.)$$

statt x den Werth $\frac{1}{n}$, so hat man:

$$\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}+1}=\cfrac{\frac{1}{n}}{1+\cfrac{\frac{1}{n^2}}{3+\cfrac{\frac{1}{n^2}}{5\ \text{etc.}}}}=\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n\ \text{etc.}}}}$$

oder

$$\frac{e^{\frac{2}{n}}+1}{e^{\frac{2}{n}}-1}=n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n\ \text{etc.}}}=(F);$$

sucht man dagegen den Werth von $(F.)$ aus §. 69., so ist $\beta+b=n$, $\beta=2n$, $\gamma=0$, $c=1$, $\alpha=0$, $a=1$, folglich

$$\frac{\partial Q}{Q}=\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{1+nx-x^2}{-2nx},$$

$$Q=e^{\frac{1+x^2}{2nx}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Dieser Ausdruck kann für keinen Werth von x Null werden, so lange n positiv ist. Ist dagegen n negativ, so wird $Q=e^{-\frac{1+x^2}{2nx}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$, für den Werth $x=\infty$, Null. In diesem Falle ist

$$A=\frac{1}{2n}\int_0^\infty\frac{\partial x}{x^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1+x^2}{2nx}}},$$

$$A_1=\frac{1}{2n}\int_0^\infty\frac{\partial x}{x^{\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{1+x^2}{2nx}}},$$

also wäre

$$\frac{A}{A_1}=-n+\cfrac{1}{-3n+\cfrac{1}{-5n\ \text{etc.}}}=-n-\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n\ \text{etc.}}}$$

oder
$$-\frac{A}{A_1} = n + \cfrac{1}{3n + \cfrac{1}{5n \text{ etc.}}} = (F).$$

Nach **Legendre's** Untersuchungen *) ist aber $\frac{A}{A_1} = 1 + n$, also wäre
$$-(1+n) = n + \cfrac{1}{3n + \cfrac{1}{5n \text{ etc.}}}$$
d. h. es wäre eine positive Zahl einer negativen gleich; man hätte auch $-\frac{A}{A_1} = \frac{e^{\frac{2}{n}}+1}{e^{\frac{2}{n}}-1}$ **), d. h. $-(1+n) = \frac{e^{\frac{2}{n}}+1}{e^{\frac{2}{n}}-1}$, was eben so wenig angeht. Der Grund dieses Widerspruchs liegt in dem Umstande, daſs hier $-\frac{A}{A_1}$ wirklich nicht die Summe von $(F.)$ ist, und daſs der irgendwo vernachlässigte Ausdruck $\frac{A_{m-1}}{A_m}$ das ganze Resultat vom Positiven zum Negativen ändert.

73.

Das Vorhergehende zeigt, daſs die Summe des Kettenbruches $F(n+1:3n+1:5n\ldots.)$ nicht durch die in §. 69. gezeigte Methode gefunden werden kann, und man würde auf dieselbe Schwierigkeit stoſsen, wenn man irgend einen anderen Kettenbruch, dessen Theilzähler sämmtlich einander gleich sind, nach dieser Methode summiren wollte. Es giebt aber einen anderen Weg, zur unmittelbaren Summation einer gewissen, hierher gehörenden Klasse von Kettenbrüchen zu gelangen ***).

Es seien die zwei Reihen
$$\varphi(b) = 1 + \frac{x}{b.\beta} + \frac{x^2}{1.2.b(b+\beta).\beta^2} + \frac{x^3}{1.2.3.b(b+\beta)(b+2\beta).\beta^3}\ldots.$$
$$\varphi(b+\beta) = 1 + \frac{x}{(b+\beta).\beta} + \frac{x^2}{1.2(b+\beta)(b+2\beta).\beta^2} + \frac{x^3}{1.2.3(b+\beta)(b+2\beta)(b+3\beta).\beta^3}\ldots.$$
gegeben. Zieht man diese von einander ab, so erhält man

1. $$\varphi(b) - \varphi(b+\beta) = \frac{x}{b(b+\beta)} + \frac{x^2}{b(b+\beta)(b+2\beta).\beta} + \frac{x^3}{1.2.b(b+\beta)(b+2\beta)(b+3\beta).\beta^2}\ldots.$$
$$= \frac{x}{b(b+\beta)}\,\varphi(b+2\beta).$$

---

*) *Exercices du calc. intégr. T. I. pag.* 367.

) Wie **Euler, der den wahren Werth von $\frac{A}{A_1}$ noch nicht kannte (*Opusc. anal. T. II. pag.* 216), wirklich glaubt.

***) Man vergleiche **Euleri** *Opusc. anal. T. II. p.* 217 ff., *Mém. de l'acad. de Pétersb. T. VI. p.* 12 ff.

Hieraus folgt $$\frac{\varphi(b)}{\varphi(b+\beta)} = 1 + \frac{x}{b(b+\beta)\frac{\varphi(b+\beta)}{\varphi(b+2\beta)}},$$

also $$\frac{\varphi(b+\beta)}{\varphi(b+2\beta)} = 1 + \frac{x}{(b+\beta)(b+2\beta)\frac{\varphi(b+2\beta)}{\varphi(b+3\beta)}},$$

und eben so kann man wieder den Werth von $\frac{\varphi(b+2\beta)}{\varphi(b+3\beta)}$ finden. Führt man auf diese Weise fort, so erhält man

$$\frac{\varphi(b)}{\varphi(b+\beta)} = 1 + \cfrac{x}{b(b+\beta) + \cfrac{bx}{b+2\beta + \cfrac{x}{b+3\beta + \cfrac{x}{b+4\beta \text{ etc.}}}}}$$

oder

$$\frac{b\varphi(b)}{\varphi(b+\beta)} = F[b + x:(b+\beta) + x:(b+2\beta) + x:(b+3\beta) + \ldots.]\ldots. = S,$$

vorausgesetzt, dafs man den weggelassenen Factor $\frac{\varphi(b+m\beta)}{\varphi(b+(m+1)\beta)}$ ohne Nachtheil für das Resultat vernachlässigen darf.

Sobald man also den Werth der zwei Reihen $\varphi(b)$, $\varphi(b+\beta)$ kennt, so ist dadurch mittelbar der Werth des Kettenbruchs S gefunden. Zur unmittelbaren Summation führen folgende Betrachtungen. Es ist

$$\frac{\partial\varphi(b)}{\partial x} = \frac{1}{b.\beta} + \frac{x}{b(b+\beta)\beta^2} + \frac{x^2}{2b(b+\beta)(b+2\beta)\beta^3} + \ldots.$$

$$\frac{x.\partial^2\varphi(b)}{\partial x^2} = \frac{x}{b(b+\beta)\beta^2} + \frac{x^2}{b(b+\beta)(b+2\beta)\beta^3} + \ldots.$$

Hieraus folgt
$$2.\quad \varphi(b) = \frac{\beta^2.x\partial^2\varphi(b)}{\partial x^2} + \frac{b.\beta\,\partial\varphi(b)}{\partial x}$$

und
$$\varphi(b+\beta) = \frac{b.\beta\,\partial\varphi(b)}{\partial x},$$

also
$$S = \frac{b\varphi b}{\varphi(b+\beta)} = \frac{b.\varphi(b)\partial x}{b.\beta\,\partial\varphi(b)} = \frac{\varphi(b)\partial x}{\beta.\partial\varphi(b)}$$

und
$$3.\quad \frac{\partial\varphi(b)}{\partial x} = \frac{\varphi(b)}{\beta.S},$$

also
$$4.\quad \frac{\partial^2\varphi(b)}{\partial x^2} = \frac{\partial\varphi(b)}{\beta.\partial x.S} - \frac{\varphi(b)\partial S}{\beta.\partial x.S^2}.$$

Substituirt man die Werthe (3.) und (4.) in (2.), so hat man

$$\varphi(b) = \frac{\beta.x\partial\varphi(b)}{\partial x.S} - \frac{\beta.x\varphi(b)\partial S}{S^2\partial x} + \frac{b.\varphi(b)}{S} = \frac{x.\varphi(b)}{S^2} - \frac{\beta.x\varphi(b)\partial S}{S^2\partial x} + \frac{b.\varphi(b)}{S},$$

$$1 = \frac{x}{S^2} - \frac{\beta.x\partial S}{S^2\partial x} + \frac{b}{S},$$

oder
$$5.\quad S^2\partial x - x\partial x + \beta x\partial S - bS\partial x = 0.$$
Integrirt man diese Gleichung, so findet man den Werth von S oder des Kettenbruches, und zwar mufs man das Integral so einrichten, dafs für den Werth $x=0$, $S=b$ wird, weil, wenn $x=0$ wird, $\varphi(b)=1$, $\varphi(b+\beta)=1$, folglich $S=b$ wird.

Betrachtet man die Gleichung (5.) als gegeben, so kann man den Kettenbruch S unmittelbar aus derselben ableiten. Denn setzt man $S=b+\frac{x}{S'}$ und substituirt diesen Werth in der Gleichung (5.), so hat man
$$S'^2\partial x - x\partial x + \beta x\partial S' - (b+\beta)S'\partial x = 0.$$
Diese Gleichung ist der Gleichung (5.) durchaus ähnlich, nur dafs $b+\beta$ statt b gesetzt ist. Es ist daher S' dieselbe Function von $b+\beta$, wie S von b; man hat daher $S'=b+\beta+\frac{x}{S''}$, $S''=b+2\beta+\frac{x}{S'''}$ etc., und so erhält man den ganzen Kettenbruch.

Man kann die Gleichung (5.) leicht auf die bekannte **Riccatische** Gleichung zurückführen. Denn man setze:
$$S=x^{\frac{b}{\beta}}.z,\quad \text{so ist } \partial S = x^{\frac{b}{\beta}}\partial z + \frac{b}{\beta}x^{\frac{b}{\beta}-1}z\partial x,$$
und man erhält durch Substitution dieses Werthes die Gleichung
$$x^{\frac{2b}{\beta}}.z^2\partial x - x\partial x + \beta.x^{\frac{b}{\beta}+1}\partial z = 0,$$
oder
$$6.\quad \partial z - \frac{\partial x}{\beta.x^{\frac{b}{\beta}}} + \frac{x^{\frac{b}{\beta}-1}}{\beta}z^2\partial x = 0.$$
Setzt man nun $x^{\frac{b}{\beta}}=t$, oder $x=t^{\frac{\beta}{b}}$, so hat man $\partial x = \frac{\partial t}{x^{\frac{b}{\beta}-1}}.\frac{\beta}{b}$, und substituirt man diesen Werth in (6.), so hat man:
$$7.\quad \partial z - \frac{1}{b}.\frac{\partial t}{x^{\frac{2b}{\beta}-1}} + \frac{1}{b}.z^2\partial t = \partial z - \frac{1}{b}\partial t.t^{\frac{\beta}{b}-2} + \frac{1}{b}z^2\partial t = 0.$$

Die letzte Form ist die, unter welcher die **Riccatische** Gleichung gewöhnlich dargestellt wird.

Die Möglichkeit, die unmittelbare Summe des Kettenbruchs S zu finden, hängt also von der Möglichkeit der Integration der Gleichung (7.) ab. Diese kann aber bekanntlich nur in dem Falle geleistet werden, wenn $\frac{\beta}{b}-2$ entweder $=2$, oder in der Form $\frac{4i}{2i\pm1}$ enthalten ist. Es mufs also $\frac{\beta-2b}{b}=\frac{-4i}{2i\pm1}$ oder $\beta=\frac{\pm2b}{2i\pm1}$ sein. Setzt man $\frac{b}{2i\pm1}=\alpha$, so ist

$\beta = \pm 2\alpha$, $b = (2i \pm 1)\alpha$, und daher die allgemeine Form des Kettenbruchs, dessen Summe möglicher Weise durch die Riccatische Gleichung gefunden werden kann:

$$(A.) \qquad (2i \pm 1)\alpha + \cfrac{x}{(2i \pm 3)\alpha + \cfrac{x}{(2i \pm 5)\alpha \text{ etc.}}}$$

Der Kettenbruch $F(n + x : 3n + x : 5n \ldots)$ ist in dieser Form enthalten. Man hat in diesem Falle $b = n$, $\beta = 2n$, und es mufs daher die Gleichung $\partial z - \frac{1}{n}\partial t + \frac{1}{n}z^2\partial t = 0$ aufgelöst werden. Hieraus folgt:

$$\partial t = \frac{\partial z}{\frac{1}{n}(1 - z^2)}, \quad \frac{t}{n} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + C, \quad e^{\frac{2t}{n}} = \frac{C(1+z)}{1-z}, \quad z = \frac{e^{\frac{2t}{n}} - C}{e^{\frac{2t}{n}} + C}.$$

Setzt man statt t seinen Werth $x^{\frac{1}{2}}$, statt z seinen Werth $\frac{S}{x^{\frac{1}{2}}}$, so hat man

$$S = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n}} - C\right)}{e^{\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n}} + C}.$$

Für den Werth $x = 0$ mufs in diesem Falle $S = n$ werden; da aber der Zähler im Werthe von S von selbst Null wird, so mufs auch der Nenner von selbst Null werden, d. h. es mufs $C = -1$ sein, also ist $S = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n}} - 1\right)}{e^{\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n}} + 1}$. Dafs der weggelassene Rest hier keinen schädlichen Einflufs auf das Resultat ausüben kann, läfst sich aus denselben Gründen wie in §. 63. zeigen.

Ist $x = 1$, so hat man $S = \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{e^{\frac{2}{n}} + 1}$, wie schon früher gefunden wurde.

Hat man den Kettenbruch $F(n - x : 3n - x : 5n \ldots)$, so ist

$$S = \frac{\sqrt{-x}\left(e^{\frac{2\sqrt{-x}}{n}} - 1\right)}{e^{\frac{2\sqrt{-x}}{n}} + 1} = \sqrt{x}\,.\,\text{tang}\frac{\sqrt{x}}{n},$$

oder wenn man statt x den Werth x^2 substituirt, so hat man:

$$F[n - x^2 : 3n - x^2 : 5n \ldots] = x\,.\,\text{tang}\frac{x}{n},$$

und wenn $n = 1$ ist:

$$\text{tang}\, x = F[x : 1 - x^2 : 3 - x^2 : 5 \text{ etc.}]$$

wie schon früher gefunden wurde.

Kann der Kettenbruch nicht unter die Form (*A.*) gebracht werden, so ist es nach dem jetzigen Standpuncte der Wissenschaft nicht möglich, vermöge der Riccatischen Gleichung, den Werth desselben in einem geschlossenen Ausdrucke zu erhalten. Es bleibt alsdann noch das Mittel übrig, diesen Werth mittelbar durch Summation der Reihen, die durch $\varphi(b)$ und $\varphi(b+\beta)$ bezeichnet wurden, zu finden. Diese Summation gehört aber nicht mehr in das Gebiet der Kettenbrüche, sondern zur Theorie der Reihen. Andeutungen zur Auffindung dieser Summen vermittelst bestimmter Integrale findet man in Fourier's *Théorie de la chaleur* §. 310 ff.

74.

Im Vorhergehenden sind einige ziemlich allgemeine Formen von Kettenbrüchen auf eine directe Weise summirt worden. Alle Formen aufzuzählen, ist hier eben so wenig möglich, wie bei den Reihen, und noch weniger kann die Summation eines jeden gegebenen Kettenbruchs direct geleistet werden. Zu den Kettenbrüchen, deren directe Summation noch nicht geleistet ist, und von besonderem Interesse wäre, gehören erstens: die Kettenbrüche, bei welchen dieselben Theilnenner periodisch wiederkehren, während die Theilzähler nach einem gewissen Gesetze fortschreiten, wie solche z. B. in §. 49. gefunden wurden; ferner diejenigen, in welchen gewisse Theilbrüche immer wiederkehren, wohin z. B. der früher §. 59. gefundene Kettenbruch $e^t = F(1:1-t:1+t:2-t:3+t:2\ldots.)$ gehört, in welchem der Theilbruch $\frac{t}{2}$ immer wiederkehrt.

Überhaupt sind die Kettenbrüche, bei welchen die Zeichen abwechselnd positiv und negativ sind, noch am wenigsten bearbeitet, und man sieht leicht, daſs ihre Summation in keinem Falle aus den Betrachtungen des §. 69. abgeleitet werden kann, weil sie nicht unter die Form des dort aufgestellten Kettenbruchs S gebracht werden können. Besondere Aufmerksamkeit verdient wohl die, den in §. 66. und §. 70. summirten Kettenbrüchen ähnliche Form, nemlich:

$$1.\quad S = m - \cfrac{n}{m+1+\cfrac{(n+1)}{m+2-\cfrac{(n+2)}{m+3+\cfrac{(n+3)}{m+4}}}}\ \text{etc.}$$

Ist $n \overline{\gtrless} m$, so convergirt der Kettenbruch (§. 55.) und ist irrational (§. 64.); ist aber $n > m$, so könnte man hier wieder den Kettenbruch in einen

endlichen verwandeln. Man setze nemlich:

$m-1+\frac{n-1}{S}=a_1$, $m-2-\frac{(n-2)}{a_1}=a_2$, $m-3+\frac{n-3}{a}=a_3$, $m-4-\frac{(n-4)}{a_3}=a_4$,

so ist

$S=\frac{-(n-1)}{m-1-a_1}$, $a_1=\frac{n-2}{m-2-a_2}$, $a_2=\frac{-(n-3)}{m-3-a_3}$, $a_3=\frac{n-4}{m-4-a_4}$, ...,

also

$$2.\quad S=\cfrac{-(n-1)}{m-1-\cfrac{(n-2)}{m-2+\cfrac{(n-3)}{m-3-\cfrac{(n-4)}{m-4\text{ etc.}}}}}$$

Man würde indessen sehr irren, wenn man hier die beiden Kettenbrüche (1.) und (2.) als identisch ansehen wollte. Ist z. B. $n=3$, $m=1$, so verwandelt sich der Kettenbruch (2.) in

$$\cfrac{-2}{0-\cfrac{1}{-1+\cfrac{0}{-2-\cfrac{-1}{-3+\cfrac{-2}{-4-\cfrac{-3}{-5\text{ etc.}}}}}}}=\cfrac{-2}{0+\cfrac{1}{1+\cfrac{0}{2+\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{4+\cfrac{3}{5-\cfrac{4}{6\text{ etc.}}}}}}}}$$

Da nun der Kettenbruch $2+\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{4\text{ etc.}}}$ convergirt und gröfser wie Null ist, so wäre der Werth von $S=-2$. Man überzeugt sich aber leicht, dafs der Werth von $1-\cfrac{3}{2+\cfrac{4}{3-\cfrac{5}{4\text{ etc.}}}}$ positiv und kleiner wie 1 ist, weil allgemein der Kettenbruch $m-\cfrac{m+2}{m+1+\cfrac{m+3}{m+2-\cfrac{(m+4)}{m+3\text{ etc.}}}}$ positiv und $\lessgtr {m \atop m-1}$ ist. Denn bleibt man bei irgend einem Theilbruche $\frac{m+r}{m+r-1}$ stehen, so hat man $\frac{m+r}{m+r-1}>1$, folglich $\cfrac{m+r-1}{m+r-2+\cfrac{m+r}{m+r-1}}\lessgtr{1 \atop 0}$, $\cfrac{m+r-2}{m+r-3-\cfrac{(m+r-1)}{m+r-2+\cfrac{m+r}{m+r-1}}}>1$, $\cfrac{m+r-3}{m+r-4+\cfrac{m+r-2}{m+r-3\text{ etc.}}}\lessgtr{1 \atop 0}$. Führt man auf diese Weise fort, so findet sich,

dafs der Kettenbruch $m - \cfrac{m+2}{m+1+ \cdots + \cfrac{m+r}{m+r-1}} \begin{matrix} > m-1 \\ < m \end{matrix}$ ist, und da r unbestimmt geblieben ist, so gilt dasselbe auch von dem ins Unendliche fortlaufenden Kettenbruch.

Die Summation einiger besonderen Formen findet man in Laplace *Méc. cél. T. IV. p.* 254. und Legendre *Tr. de fonct. ellipt. T. II. p.* 508. Die Summation einer besonderen Gattung von Kettenbrüchen wird noch später (Kap. 6.) vorkommen.

Fünftes Kapitel.

A. Anwendung der Kettenbrüche zur Auflösung der Zahlengleichungen.

75.

Lagrange hat zuerst gezeigt*), wie man die Kettenbrüche zur Auflösung der Gleichungen anwenden kann. Seine Methode ist aber mit einer grofsen Unvollkommenheit behaftet, die sie in den meisten Fällen ganz unbrauchbar macht. Sie fordert nemlich, dafs man schon den kleinsten Unterschied der Wurzeln der aufzulösenden Gleichung kennt; das Aufsuchen dieses Unterschiedes aber, von welchem zugleich die Entdeckung der imaginären Wurzeln abhängt, führt bei höheren Gleichungen zu so verwickelten Rechnungen, dafs dieses Verfahren als ganz unausführbar angesehen werden mufs. Fourier, dessen Bearbeitung der Lagrangeschen Methode leider nicht erschienen ist, hat in dem *Exposé synoptique*, welches dem ersten Theile seines Werkes „*Analyse des équations*" vorausgeschickt ist, angedeutet: dafs das Aufsuchen des kleinsten Unterschiedes ganz überflüssig ist, dafs man vielmehr die aufzulösende Gleichung zuerst so behandeln mufs, als ob alle Wurzeln reell wären, dafs ferner, wenn sie imaginäre Wurzeln enthalten sollte, diese durch den Fortgang der Rechnung selbst angedeutet werden, und die Berechnung der reellen Wurzeln alsdann um so leichter wird. Diese Resultate wieder herzustellen, ist der nächste Zweck der folgenden Betrachtungen. Es ist aber hierzu erforderlich: zuerst aus Fourier die Methode zu entlehnen, durch welche man die Gränzen findet, innerhalb welcher die Wurzeln einer Gleichung enthalten sind. Dies soll in den nächsten §. §. 76. — 82. geschehen.

---

*) *Mémoire de l'académie de Berlin année* 1767 *et* 1768, *Traité de la résolution des équations numériques.*

76.

Es sei die Gleichung:

$f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$

gegeben, wo A, A_1, $A_2 \ldots A_m$ bestimmte Zahlen bedeuten, und m eine ganze Zahl ist. Es wird vorausgesetzt, daſs diese Gleichung keine gleiche Wurzeln hat. Wäre eine Gleichung gegeben, die solche enthielte, so könnte man sie leicht nach bekannten Regeln entdecken, und die sie enthaltenden Factoren wegschaffen. Man differenziire diese Gleichung m Mal hinter einander, und schreibe die Differenzial-Coeffizienten in umgekehrter Ordnung neben einander, so daſs man die Folge:

$$(A.) \quad \frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial^{m-1} f(x)}{\partial x^{m-1}} \ldots \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad f(x)$$

erhält. Es soll nun, wenn in irgend einer dieser Functionen statt x der bestimmte Werth α substituirt wird, z. B. in $\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r}$, durch $\frac{\partial^r f(\alpha)}{\partial \alpha^r}$ der Werth angedeutet werden, welchen $\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r}$ durch diese Substitution erhält. Substituirt man in der Folge (A.) statt x überall den Werth α, so wird jedes einzelne Glied das positive oder negative Zeichen haben. Diese Zeichen schreibe man in der Ordnung, wie man sie erhält, neben einander; die ganze Zeichenreihe soll durch $[\alpha]$ angedeutet werden. Setzt man statt x den Werth $-\infty$, so reducirt sich jede der Functionen

$$\frac{\partial^{m-1} f(x)}{\partial x^{m-1}}, \quad \frac{\partial^{m-2} f(x)}{\partial x^{m-2}} \ldots f(x)$$

auf ihr erstes Glied, daher hat die erste Function $\frac{\partial^m f(-\infty)}{\partial -\infty^m}$ das $+$ Zeichen, die zweite $\frac{\partial^{m-1} f(-\infty)}{\partial -\infty^{m-1}}$ das $-$ Zeichen, die dritte das $+$ Zeichen u. s. w. Die Zeichenreihe $[-\infty]$ enthält also nur Zeichenwechsel.

Setzt man dagegen $x = \infty$, so haben alle Functionen das $+$ Zeichen, und die Zeichenreihe enthält nur Zeichenfolgen. Setzt man statt x eine Zahl $\pm\alpha$, die zwischen $-\infty$ und ∞ liegt, so ist leicht einzusehen, daſs die dadurch entstehende Zeichenreihe $[\pm\alpha]$ so lange dieselbe ist wie $[-\infty]$, als nicht zwischen $-\infty$ und $\pm\alpha$ eine Zahl liegt, die so beschaffen ist, daſs wenn man sie statt x substituirt, alsdann eine der Functionen

$$\frac{\partial^m f(x)}{\partial x} \ldots f(x)$$

auf Null reducirt wird, weil eine Änderung in der Zeichenreihe nur dann entstehen kann, wenn eine dieser Functionen vom Positiven zum Negati-

ven oder umgekehrt übergeht, dieser Übergang aber bei keiner algebraischen Function Statt haben kann, wenn sie nicht durch den Werth Null geht. Es ist daher besonders wichtig, zu untersuchen, welche Änderung in der Zeichenreihe die Substitution eines Werthes α hervorbringt, der wirklich eine der Functionen auf Null reducirt.

77.

Man nehme zuerst an, diese Function sei $f(x)$, so daſs $f(\alpha)=0$ ist, dagegen $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial\alpha^2}$ u. s. w. sämmtlich bekannte positive oder negative Werthe haben. Man substituire statt x in der Folge (A.) nach einander die drei Werthe $\alpha-\partial\alpha$, α, $\alpha+\partial\alpha$, und setze die dadurch entstehenden Zeichenreihen

$$[\alpha-\partial\alpha],\ [\alpha],\ [\alpha+\partial\alpha]$$

auf drei horizontale Linien unter einander. Diese Reihen werden nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen, das jede enthält, verschieden sein. Denn da der Werth des Differenzials $\partial\alpha$ unbestimmt ist, so kann es immer so klein genommen werden, daſs keine der Functionen

$$\frac{\partial^m f(\alpha+\partial\alpha)}{\partial\alpha^m},\ \frac{\partial^{m-1} f(\alpha+\partial\alpha)}{\partial\alpha^{m-1}},\ \ldots\ \frac{\partial^m f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial\alpha^m},\ \frac{\partial^{m-1} f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial\alpha^{m-1}},\ \ldots$$

Null wird; diese Functionen behalten also bezüglich dasselbe Zeichen wie $\frac{\partial^m f(\alpha)}{\partial\alpha^m}$, $\frac{\partial^{m-1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{m-1}}$, ... Dagegen wird $f(\alpha-\partial\alpha)$ negativ oder positiv werden, je nachdem $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ positiv oder negativ ist, weil $f(\alpha)$ Null ist, und daher das erste in der Entwickelung von $f(\alpha-\partial\alpha)$ hervortretende Glied, welches das Zeichen der Function bestimmt, $-\partial\alpha.\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ ist. Aus ähnlichen Gründen ist $f(\alpha+\partial\alpha)$ positiv oder negativ, je nachdem $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ positiv oder negativ ist. Ist $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ positiv, so werden die drei Zeichenreihen, wenn man nur die letzten Zeichen berücksichtigt, folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \ldots.+-\\ [\alpha] &= \ldots.+\ 0\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \ldots.++\end{aligned}$$

Ist $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ negativ, so hat man:

$$\begin{aligned}[\alpha+\partial\alpha] &= \ldots.-+\\ [\alpha] &= \ldots.-\ 0\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \ldots.--\end{aligned}$$

In jedem Falle ist in der Zeichenreihe $[\alpha+\partial\alpha]$ ein Zeichenwechsel weniger als in der Zeichenreihe $[\alpha-\partial\alpha]$, sobald $f(\alpha)=0$, d. h. α eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist.

78.

Ist aber α keine Wurzel der Gleichung, also $f(\alpha)$ nicht Null, dagegen irgend eine andere Function $\frac{\partial^n f(\alpha)}{\partial\alpha^n}$, und nur diese, gleich Null, und man substituirt wieder allmählig statt x die Werthe $\alpha-\partial\alpha$, α, $\alpha+\partial\alpha$, so wird man auch in diesem Falle $\partial\alpha$ so klein annehmen können, dafs alle correspondirende Zeichen der drei Reihen:

$$[\alpha-\partial\alpha],\ [\alpha],\ [\alpha+\partial\alpha]$$

gleich sind, bis auf die drei Zeichen, welche durch die Substitution der drei Werthe in $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$ entstehen. Man hat daher nur nöthig, die drei auf einander folgenden Functionen $\frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}}$, $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x^{n-1}}$ zu betrachten, wenn man wissen will, wie sich die drei Zeichenreihen $[\alpha-\partial\alpha]$, $[\alpha]$, $[\alpha+\partial\alpha]$ gegen einander verhalten. Die Function $\frac{\partial^n f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial\alpha^n}$ ist negativ oder positiv, und die Function $\frac{\partial^n f(\alpha+\partial\alpha)}{\partial\alpha^n}$ positiv oder negativ, je nachdem $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ positiv oder negativ ist, die Function $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-1}}$ kann aber ebenfalls positiv oder negativ sein. Hierdurch entstehen vier verschiedene Combinationen. Sind $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ und $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-1}}$ beide positiv, so hat man, wenn man nur die den Functionen $\frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}}$, $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x^{n-1}}$ entsprechende Zeichen niederschreibt:

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \ldots\ldots + - + \ldots\ldots\\ [\alpha] &= \ldots\ldots + \ 0\ + \ldots\ldots\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \ldots\ldots + + + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Sind $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ und $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-1}}$ beide negativ, so hat man:

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \ldots\ldots - + - \ldots\ldots\\ [\alpha] &= \ldots\ldots - \ 0\ - \ldots\ldots\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \ldots\ldots - - - \ldots\ldots\end{aligned}$$

In diesen zwei Fällen hat also $[\alpha+\partial\alpha]$ zwei Zeichenwechsel weniger als $[\alpha-\partial\alpha]$. Ist $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ negativ, $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-1}}$ positiv, so hat man:

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots\ldots - + + \ldots\ldots$$
$$[\alpha] = \ldots\ldots - \ 0 + \ldots\ldots$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots\ldots - - + \ldots\ldots$$

Ist $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}}$ positiv, $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}}$ negativ, so hat man:

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots\ldots + - - \ldots\ldots$$
$$[\alpha] = \ldots\ldots + \ 0 - \ldots\ldots$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots\ldots + + - \ldots\ldots$$

In den zwei letzten Fällen enthält also $[\alpha+\partial\alpha]$ eben so viel Zeichenwechsel als $[\alpha-\partial\alpha]$.

79.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, wenn mehr wie eine Function durch die Substitution des Werthes α Null wird, und zwar nehme man zuerst an, daſs die e auf einander folgenden Functionen,

$$\frac{\partial^n f(\alpha)}{\partial \alpha^n}, \quad \frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}}, \ldots \frac{\partial^{n-e+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-e+1}}$$

(unter welchen sich aber $f(\alpha)$ nicht befindet), und nur diese Null werden. Bildet man die drei Zeichenreihen:

$$[\alpha-\partial\alpha], \quad [\alpha], \quad [\alpha+\partial\alpha],$$

so kann man $\partial\alpha$ so einrichten, daſs die correspondirenden Functionen, die der Function $\frac{\partial^n f(\alpha)}{\partial \alpha^n}$ vorausgehen, und eben so die correspondirenden Functionen, die auf die Function $\frac{\partial^{n-e+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-e+1}}$ folgen, in den drei Reihen gleiche Zeichen haben. Um also zu finden, wie sich die Zeichenreihe in ihrem Übergange von $[\alpha-\partial\alpha]$ zu $[\alpha+\partial\alpha]$ ändert, braucht man nur die den Functionen

$$\frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}}, \quad \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}, \ldots \frac{\partial^{n-e} f(x)}{\partial x^{n-e}}$$

entsprechenden Zeichen zu betrachten. Man hat

$$\frac{\partial^n f(\alpha+\partial\alpha)}{\partial \alpha^n} = \partial\alpha . \frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}} + \ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^{n-1} f(\alpha+\partial\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}} = \frac{(\partial\alpha)^2}{2} . \frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}} + \ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^{n-2} f(\alpha+\partial\alpha)}{\partial \alpha^{n-2}} = \frac{(\partial\alpha)^3}{2.3} \frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^n f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial \alpha^n} = -\partial\alpha . \frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{n-1}f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial\alpha^{n-1}} = \frac{(\partial\alpha)^2}{2}\cdot\frac{\partial^{n+1}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}} + \dots\dots$$

$$\frac{\partial^{n-2}f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial\alpha^{n-2}} = -\frac{(\partial\alpha)^3}{1.2}\cdot\frac{\partial^{n+1}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}} + \dots\dots$$

. . . .

Ist e eine gerade Zahl, und $\frac{\partial^{n+1}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ positiv, so hat man daher:

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \dots\dots + - + - \dots\dots + - + \pm\\ [\alpha] &= \dots\dots + \;0\;0\;0 \dots\dots 0\;0\;0 \pm\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \dots\dots + + + + \dots\dots + + + \pm\end{aligned}$$

und ist $\frac{\partial^{n+1}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ negativ, so hat man

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \dots\dots - + - + \dots\dots - + - \pm\\ [\alpha] &= \dots\dots - \;0\;0\;0 \dots\dots 0\;0\;0 \pm\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \dots\dots - - - - \dots\dots - - - \pm\end{aligned}$$

In jedem Falle hat also die Zeichenreihe $[\alpha+\partial\alpha]$ e Zeichenwechsel weniger als $[\alpha-\partial\alpha]$. Ist aber e eine ungerade Zahl, so kommt es darauf an, ob $\frac{\partial^{n+1}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ und $\frac{\partial^{n-e}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-e}}$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Im ersten Falle hat $[\alpha+\partial\alpha]$ $e+1$ Zeichenwechsel, im zweiten $e-1$ Zeichenwechsel weniger als $[\alpha-\partial\alpha]$. Denn sind $\frac{\partial^{n+1}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ und $\frac{\partial^{n-e}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-e}}$ beide positiv, so hat man:

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \dots\dots + - + - \dots\dots + - + - + \dots\dots\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \dots\dots + + + + \dots\dots + + + + + \dots\dots\end{aligned}$$

und sind beide negativ, so hat man:

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \dots\dots - + - + \dots\dots - + - + - \dots\dots\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \dots\dots - - - - \dots\dots - - - - - \dots\dots\end{aligned}$$

Ist dagegen $\frac{\partial^{n+1}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ positiv, und $\frac{\partial^{n-e}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-e}}$ negativ, so hat man:

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \dots\dots + - + - \dots\dots + - + - -\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \dots\dots + + + + \dots\dots + + + + -\end{aligned}$$

und ist $\frac{\partial^{n+1}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ negativ, und $\frac{\partial^{n-e}f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-e}}$ positiv, so hat man

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \dots\dots - + - + \dots\dots - + - + +\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \dots\dots - - - - \dots\dots - - - - +\end{aligned}$$

80.

Es ist noch der allgemeine Fall zu betrachten, wenn an verschiedenen Stellen der Folge (*A.*) verschiedene Gruppen von Functionen Null

werden, z. B. an einer Stelle e Functionen, an einer anderen e_1 Functionen u. s. w. Dieser Fall kann leicht auf den vorhergehenden zurück geführt werden; man braucht nemlich nur jede der verschwindenden Gruppen für sich zu betrachten. Will man daher wissen, wie viel Zeichenwechsel $[\alpha+\partial\alpha]$ weniger hat als $[\alpha-\partial\alpha]$, so betrachte man zuerst die Gruppe von e Functionen. Ist e eine gerade Zahl, so finden sich eben deswegen in $[\alpha+\partial\alpha]$ e Zeichenwechsel weniger als in $[\alpha-\partial\alpha]$, ist e ungerade, so hat $[\alpha+\partial\alpha]$ $e+1$ oder $e-1$ Zeichenwechsel weniger. Eben so wird die Zeichenreihe $[\alpha+\partial\alpha]$ wegen der Gruppe von e_1 Functionen, nach Umständen e_1, e_1+1 oder e_1-1 Zeichenwechsel weniger als $[\alpha-\partial\alpha]$ haben u. s. w.

Es wird hier immer vorausgesetzt, dafs $f(x)$ nicht unter den verschwindenden Functionen ist, weil sonst die Gleichung gleiche Wurzeln hätte, gegen die Voraussetzung (§. 76.).

81.

Aus dem Vorhergehenden lassen sich nun folgende Resultate ableiten:

I. Zwischen dem Werthe $x=-\infty$ und dem Werthe $x=\infty$ verliert die Zeichenreihe m Zeichenwechsel (§. 76.). Substituirt man daher nach einander die Werthe α, β, statt x, so können die zwei Zeichenreihen $[\alpha]$, $[\beta]$ nur höchstens um m Zeichenwechsel verschieden sein.

II. Die Anzahl der Zeichenwechsel kann, wenn man immer gröfsere und gröfsere Werthe (mit Rücksicht auf das Zeichen) statt x substituirt, nie zunehmen, die einmal verlorenen Zeichenwechsel können bei keiner späteren Substitution wieder erscheinen.

III. Liegen zwischen den Werthen $x=\alpha$ und $x=\beta$, n unter einander verschiedene reelle Wurzeln der Gleichung α_1, α_2, α_3, ..., so mufs $[\beta]$ **wenigstens** n Zeichenwechsel weniger haben als $[\alpha]$, denn $[\alpha_1+\partial\alpha_1]$ hat einen Zeichenwechsel (wenigstens) weniger als $[\alpha_1-\partial\alpha_1]$ (§. 77.); eben so hat $[\alpha_2+\partial\alpha_2]$ einen Zeichenwechel weniger als $[\alpha_2-\partial\alpha_2]$ u. s. w.

IV. **Hat daher $[\beta]$ nicht weniger Zeichenwechsel als $[\alpha]$, so kann zwischen α und β keine Wurzel liegen; hat aber $[\beta]$ n Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$, so können zwischen α und β nur n Wurzeln ligen.**

V. Man darf aber aus dem Umstande, dafs $[\beta]$ n Zeichenwechel weniger als $[\alpha]$ hat, nicht schliefsen, dafs zwischen α und β auch wirklich n reelle Wurzeln liegen, weil das Verschwinden der Zeichenwechsel

auch dadurch entstanden sein kann, daſs eine oder mehrere der in der Folge (*A.*) enthaltenen Functionen durch einen zwischen α und β liegenden Werth Null geworden sind, ohne daſs $f(x)$ durch die Substitution eines solchen Werthes Null wird. So viel ist aber gewiſs, daſs wenn n eine ungerade Zahl ist, zwischen α und β wenigstens eine reelle Wurzel liegt, weil, wenn eine oder mehrere der in der Folge (*A.*) enthaltenen abgeleiteten Functionen Null werden, nur eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln verschwinden kann (§. 78., 79., 80.).

VI. Da das Verschwinden eines Zeichenwechsels immer auf eine reelle Wurzel deutet, so müssen nothwendig durch die Substitution irgend eines Werthes zwei Zeichenwechsel auf einmal verschwinden, sobald der Gleichung zwei reelle Wurzeln fehlen, d. h. sobald sie zwei imaginäre Wurzeln hat, und es müssen überhaupt so viel Paare von Zeichenwechseln verschwinden, als die Gleichung Paare von imaginären Wurzeln enthält.

VII. Weiſs man mit Gewiſsheit, daſs zwischen den Gränzen α und β keine reelle Wurzel liegt, und hat $[\beta]$ $2n$ Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$, so folgt daraus, daſs die Gleichung wenigstens $2n$ imaginäre Wurzeln hat. Ist daher irgend ein Werth α keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, d. h. mit anderen Worten, liegt zwischen $\alpha - \partial\alpha$ und $\alpha + \partial\alpha$ keine Wurzel dieser Gleichung, und hat $[\alpha + \partial\alpha]$ $2n$ Zeichenwechsel weniger als $[\alpha - \partial\alpha]$, so folgt hieraus, daſs die Gleichung wenigstens $2n$ imaginäre Wurzeln hat.

82.

Die Frage, wie man die Gränzen, innerhalb welcher die Wurzeln liegen, finden kann, ist durch das Gesagte vollständig gelöst, und wird praktisch am leichtesten auf folgende Weise erledigt. Man gehe von dem Werthe $x = 0$ zuerst rückwärts, und setze allmählig $x = -1$, $x = -10$, $x = -10^2$ u. s. w., bis man an einen Werth $x = -10^n$ kommt, der so beschaffen ist, daſs $[-10^n]$ nur Zeichenwechsel enthält; zwischen $-\infty$ und -10^n kann also keine Wurzel der Gleichung liegen. Dann setze man $x = 1$, $x = 10$, $x = 10^2$ u. s. w., bis man an einen Werth 10^r kommt, der so beschaffen ist, daſs $[10^r]$ nur Zeichenfolgen enthält; zwischen 10^r und ∞ kann wieder keine Wurzel liegen, vielmehr müssen alle Wurzeln zwischen -10^n und 10^r enthalten sein. Man vergleiche daher jede zwei der auf einander folgenden Zeichenreihen $[-10^n]$ und $[-10^{n-1}]$, $[-10^{n-1}]$ und $[-10^{n-2}]$ bis $[-10^{r-1}]$ und $[-10^r]$. Haben zwei solche auf einander folgende Zeichenreihen dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln, so liegt keine

Wurzel zwischen ihnen; diese Zwischenräume werden nicht weiter beachtet; hat die zweite Zeichenreihe einen Zeichenwechsel weniger als die erste, so liegt eine reelle Wurzel zwischen den entsprechenden Gränzen, hat die zweite eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln weniger als die erste, so liegt wenigstens eine reelle Wurzel zwischen diesen Gränzen, ist aber die Anzahl dieser Zeichenwechsel eine gerade, so ist es zweifelhaft, ob dieser Umstand auf eine gerade Zahl reeller Wurzeln oder auf eine Anzahl imaginärer Wurzeln deutet.

Es kann auch vorkommen, daſs die Zeichenreihe, die einem Werthe α entspricht, nicht unmittelbar mit einer anderen verglichen werden kann, weil einige der Functionen $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x^{n-1}}$ u. s. w. durch die Substitution $x = \alpha$ Null werden. In diesem Falle nimmt man statt α einmal $\alpha - \partial\alpha$, und dann $\alpha + \partial\alpha$, $[\alpha - \partial\alpha]$ und $[\alpha + \partial\alpha]$ werden wieder vollständige Zeichenreihen sein. Will man daher $[\alpha]$ mit einer Zeichenreihe $[\beta_1]$ vergleichen, die einem Werthe $\beta_1 < \alpha$ entspricht, so nimmt man statt $[\alpha]$ die Zeichenreihe $[\alpha - \partial\alpha]$, will man aber $[\alpha]$ mit einer Zeichenreihe $[\beta]$ vergleichen, die einem Werthe $\beta > \alpha$ entspricht, so nimmt man $[\alpha + \partial\alpha]$ statt $[\alpha]$.

83.

Es ist einleuchtend, daſs man durch das im vorigen §. angegebene Verfahren, welches in der Folge, der Kürze halber, das Theorem (*A.*) heiſsen soll, die Gränzen, innerhalb welcher alle Wurzeln liegen, mit Sicherheit finden kann; es giebt aber keinen sicheren Aufschluſs über die Natur der Wurzeln. Im Gegentheil bleibt es in den meisten Fällen ungewiſs, ob die durch den Unterschied in der Anzahl der Zeichenwechsel angedeuteten Wurzeln reell oder imaginär sind. Es muſs also die Frage gelöst werden, wie man die reellen Wurzeln von den imaginären unterscheiden kann. Es ist einleuchtend, daſs diese Frage nicht dadurch entschieden werden kann, daſs man statt der schon gezogenen Gränzen α, β, engere α_1, β_1 zieht. Denn liegen z. B. zwischen α und β zwei imaginäre Wurzeln, so daſs $[\beta]$ zwei Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$ hat, so wird auch $[\beta_1]$ zwei Zeichenwechsel weniger als $[\alpha_1]$ haben; so lange man aber über die Natur der Wurzeln ungewiſs ist, kann man nicht wissen, ob dies nicht daher rührt, daſs die Gleichung zwei reelle Wurzeln hat, die zwischen α_1 und β_1 liegen, und dieser Zweifel würde bleiben, wie enge auch

die Gränzen gezogen sind. Man findet aber bald, dafs jede genaue Näherungsmethode, d. h. jede, welche lehrt, wie man sich mit Sicherheit dem wahren Werthe der reellen Wurzeln, wenn solche vorhanden sind, immer mehr nähern kann, nothwendig auch auf die Entdeckung der imaginären Wurzeln führt. Sobald nemlich das Theorem ($A.$) gegeben ist, so sind mit demselben auch eine unendliche Menge genauer Näherungsmethoden gegeben, die sich im Grunde nur durch die äufsere Form unterscheiden, die sie dem Werthe der Wurzeln geben. Denn hat man durch das Theorem ($A.$) gefunden, dafs eine oder mehrere Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen den Gränzen α und β enthalten sind, so ist α ein Näherungswerth von x. Setzt man den noch unbekannten Theil des Werthes der Wurzel $=x_1$, so kann man x als eine Function der Gröfsen α und x_1 ansehen und daher $x=F(\alpha, x_1)$ setzen. Substituirt man diesen Werth von x in $f(x)=0$, so erhält man eine neue Gleichung $\varphi(x_1)=0$, und man kann, vermöge des Theorems ($A.$) wieder Gränzen α_1, β_1 bestimmen, innerhalb welcher x_1 liegt. Setzt man alsdann $x_1=\psi(\alpha_1, x_2)$ und substituirt diesen Werth in $\varphi(x_1)=0$, so erhält man eine neue Gleichung $\chi(x_2)=0$, und man kann wieder, vermöge des Theorems ($A.$), die Gränzen bestimmen, innerhalb welcher x_2 liegt, und auf diese Weise kann man sich dem wahren Werthe von x immer mehr nähern. Die Frage, wie man sich dem wahren Werthe einer Wurzel immer mehr nähern kann, kommt also darauf zurück, mit Hülfe des Theorems ($A.$) einen continuirlichen Ausdruck zu finden, der sich der Wurzel desto mehr nähert, je mehr Glieder desselben man zusammen nimmt. Da es aber unendlich viele continuirliche Formen giebt, so giebt es auch unendlich viele Näherungsmethoden; die Hauptformen sind auch hier wieder die unendlichen Producte, die unendlichen Reihen und die Kettenbrüche. Hat man nun vermöge des Theorems ($A.$) gefunden, dafs zwischen den Zahlen α und β, n Wurzeln der Gleichung angedeutet werden, so mufs jede genaue Näherungsmethode, wenn man sie unter der Voraussetzung anwendet, dafs n reelle Wurzeln vorhanden sind, auch n reelle Werthe liefern, wenn die Voraussetzung richtig ist; liegen aber zwischen α und β weniger als n reelle Wurzeln, so mufs die unter einer falschen Voraussetzung angewandte Methode, indem sie n Werthe zu entwickeln sucht, nothwendig auf einen Widerspruch, auf etwas Ungereimtes führen, und gerade darin liegt das Kennzeichen der imaginären Wurzeln.

84.

Eine der bekanntesten Auflösungsmethoden, die **Newtonsche**, beruht auf der Entwickelung der Wurzeln durch eine unendliche Reihe. Es sind aber noch eine Menge anderer Auflösungsmethoden möglich, die sich auf dieselbe Entwickelungsart gründen, und nur durch die Form, die man der unendlichen Reihe giebt, von einander verschieden sind. Sie führen alle, sobald man das Theorem (A.) zu Hülfe nimmt, eben so sicher zum Zwecke, wie die **Newtonsche** Methode, wenn auch nicht alle eben so schnell. Eine der einfachsten dieser Methoden ist z. B. folgende. Wir wollen zuerst annehmen, es sei ein rationaler Bruch, z. B. $\frac{98}{27}$ gegeben, der in eine Reihe verwandelt werden soll, so kann dies auf folgende Weise geschehen. Man suche zuerst die gröfste ganze Zahl, die in diesem Bruche enthalten ist. Diese ist hier 3, man hat $\frac{98}{27} = 3 + \frac{17}{27}$. Man suche nun zwei Brüche $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m+1}$, zwischen welchen $\frac{17}{27}$ enthalten ist (m bedeutet eine ganze Zahl). Man findet $\frac{17}{27} \gtrless {}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{1}}$, und zwar $\frac{17}{27} = \frac{1}{2} + \frac{7}{54}$, eben so $\frac{7}{54} \gtrless {}^{\frac{1}{8}}_{\frac{1}{7}}$ $= \frac{1}{8} + \frac{1}{4.54}$, also

$$\frac{98}{27} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4.54}.$$

Ganz auf dieselbe Weise kann man den rationalen oder irrationalen Werth der Wurzel einer Gleichung entwickeln. Es sei die Gleichung

$$(a.) \qquad Ax^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots . A_m = 0$$

gegeben. Man habe durch das Theorem (A.) zwei Zeichenreihen [α] und [β] gefunden, so beschaffen, dafs [α] nur einen Zeichenwechsel mehr enthält als [β], so liegt also zwischen α und β eine Wurzel der Gleichung (a.). Man setze nun $x = \alpha + \frac{1}{x_{,}}$ *), substituire diesen Werth in (a.) und bilde die neue Gleichung

$$(b.) \qquad F(x_{,}) = 0.$$

Die Gröfse $x_{,}$ mufs nothwendig positiv und gröfser als die Einheit, oder $= 1$ sein. Man suche nun durch das Theorem (A.) zwei ganze positive Zahlen m und $m+1$, zwischen welchen x' liegt, alsdann setze man $x = \alpha + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{x_{,,}}$, und bilde, indem man diesen Werth in (a.) substituirt,

---

*) Es wird hier vorausgesetzt, dafs α und β positive Zahlen sind, wären sie negative, so würde man $x = \beta + \frac{1}{x_{,}}$ setzen.

die neue Gleichung

$$(c.)\quad \varphi(x_{,,}) = 0 \quad (x_{,,} \text{ mufs wieder } \overline{\overline{>}}\, 1 \text{ sein}).$$

Man bestimme wieder durch das Theorem ($A.$) die zwei ganzen positiven Zahlen m_1 und $m_1 + 1$, zwischen welchen $x_{,,}$ liegt, so hat man $x = \alpha + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m_1+1} + \frac{1}{x_2}$, und indem man dasselbe Verfahren fortsetzt, so kann man den Werth von x so genau, als man es wünscht, erhalten. Sollte aber [α] mehr als einen Zeichenwechsel mehr als [β] enthalten, so würde der Zweifel entstehen, ob dieser Unterschied in der Anzahl der Zeichenwechsel auf reelle oder imaginäre Wurzeln deutet. Die Fortsetzung der Entwickelung entscheidet aber hierüber immer mit Sicherheit. Da es hier nicht unsere Absicht ist, diese Auflösungsmethode in allen ihren Einzelnheiten zu verfolgen, so wollen wir nur den besonderen Fall betrachten, wenn [α] zwei Zeichenwechsel mehr hat als [β], da sich ohnehin von diesem Falle auf die übrigen leicht schliefsen läfst. Es entsteht also der Zweifel, ob zwischen α und β zwei reelle Wurzeln enthalten sind, oder ob zwei imaginäre angedeutet werden. Sind beide Wurzeln reell, so mufs auch die Gleichung ($b.$) zwei reelle Wurzeln haben. Findet man, dafs die Wurzeln dieser Gleichung nicht zwischen denselben Gränzen m und $m+1$, sondern zwischen verschiedenen Gränzen m und $m+1$, M und $M+1$ liegen, so sind auch die Wurzeln der Gleichung ($a.$) getrennt, und daher reell; hat dagegen ($b.$) keine Wurzel, die $\overline{\overline{>}}\, 1$ ist, so folgt daraus, dafs die zwei Wurzeln der Gleichung ($a.$) imaginär sind. Nur in dem Falle, wenn auch die beiden Wurzeln der Gleichung ($b.$) zwischen den Gränzen m und $m+1$ liegen sollten, bliebe die Natur der Wurzeln zweifelhaft. Man bilde alsdann die Gleichung ($c.$). Sind die Wurzeln der Gleichung ($a.$) reell, so mufs auch ($c.$) zwei Wurzeln haben, die $\overline{\overline{>}}\, 1$ sind; sucht man daher die Gränzen der Wurzeln der Gleichung ($c.$) und findet, dafs sie $\overline{\overline{>}}\, 1$ und getrennt sind, so folgt daraus, dafs die Wurzeln der Gleichung ($a.$) reell sind, hat ($c.$) nicht zwei Wurzeln die $\overline{\overline{>}}\, 1$ sind, so sind die Wurzeln der Gleichung ($a.$) imaginär; sollten aber die Wurzeln der Gleichung ($c.$) zwischen denselben ganzen positiven Zahlen m_1 und m_1+1 enthalten sein, so mufs man wieder eine neue Gleichung ($d.$) bilden, und indem man so fortfährt, mufs man nothwendig dahin kommen, die Wurzeln zu trennen, oder zu erkennen, dafs sie imaginär sind.

Es sei z. B. die Gleichung:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

gegeben. Hier hat man:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2,$$
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 + 4x - 3,$$
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 6x + 4,$$
$$\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 6,$$

und

$$[-10] = + - + -$$
$$[-\ 1] = + - - +$$
$$[0] = + + - +$$
$$[1] = + + + +$$

Es liegt also eine Wurzel zwischen —10 und —1. Zwei Wurzeln werden zwischen 0 und 1 angedeutet. Um zu entscheiden, ob sie reell oder imaginär sind, setze man $x = 0 + \frac{1}{x_1}$ und substituire diesen Werth in $f(x)$, so erhält man die neue Gleichung:

$$F(x_1) = 2x_1^3 - 3x_1^2 + 2x_1 + 1 = 0.$$

Hier hat man

$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} = 6x_1^2 - 6x_1 + 2,$$
$$\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x_1^2} = 12x - 6,$$
$$\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} = 12,$$

folglich ist

$$[1] = + + + +$$

Es liegt also zwischen 1 und ∞ keine Wurzel der Gleichung $F(x_1) = 0$, d. h. die Wurzeln dieser Gleichung sind zwischen $-\infty$ und 1 enthalten, folglich sind die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ imaginär *).

85.

Der Gebrauch der unendlichen Producte zur Auflösung der Gleichungen soll nur an einem ganz einfachen Beispiele gezeigt werden. Es soll die Gleichung:

$$x^2 - 2 = 0$$

*) Vergl. *Analyse des équat. pag.* 125.

aufgelöst werden. Man weiſs hier auch ohne Hülfe des Theorems (*A.*), daſs ein Werth von x zwischen 1 und 2 liegt, also $x < \frac{2}{1}$. Man setze nun $x = \frac{2}{1} \cdot \frac{x_{\prime}}{3}$, so hat man:

$$4x_{\prime}^2 - 18 = 0,$$

also $x_{\prime} \gtrless \frac{2}{3}$ und $x > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}$. Man setze $x = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x_{\prime\prime}}{5}$, so ist

$$16x_{\prime\prime}^2 - 450 = 0,$$

also $x_{\prime\prime} \gtrless \frac{5}{6}$, folglich $x < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}$, man setze $x = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{x_{\prime}}{7} \dots\dots$ Führt man auf diese Weise fort, so findet man:

$$x = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \dots = \sqrt{2},$$

ein Resultat, das man schon lange auf indirectem Wege gefunden hat*).

86.

Will man die Wurzel durch einen Kettenbruch ausdrücken, so kann dies wieder auf sehr verschiedene Weise geschehen, je nachdem man diesem Kettenbruche eine oder die andere Form giebt. Am vortheilhaftesten ist es, die Form des Kettenbruchs so zu bestimmen, daſs alle Theilzähler der Einheit gleich, und alle Theilnenner positive ganze Zahlen sind. Denn diese Kettenbrüche haben, wie schon früher gezeigt wurde (§. 15.), die Eigenschaft, daſs die Näherungswerthe, die man aus denselben erhält, dem wahren Werthe näher sind, als jeder andere Bruch, dessen Nenner nicht gröſser als der Nenner des Näherungswerthes ist. Man hat daher schon lange diese Kettenbrüche angewandt, um die Aufgabe zu lösen, wie man zu einem Bruche mit sehr groſsem Zähler und Nenner andere kleinere Brüche finden kann, die sich dem Werthe desselben so viel als möglich nähern**). Ist nemlich ein Bruch $\frac{A}{B}$ gegeben, so kann

---

*) Vergl. Euler *Introd. in an. inf. pag.* 147.

**) So viel man weiſs, war Hugenius der erste, der die Kettenbrüche zur Lösung dieser Aufgabe anwandte, in seiner Abhandlung: *De automato planetario.* Die dort beschriebene Maschine wurde im Jahre 1682 ausgeführt (s. die Vorrede zu Hugen. *Opusc. posth. Lugd.* 1703). Wallis hat dieselbe durch ein viel schwierigeres Verfahren gelöst; sie wurde ihm im Jahre 1663 oder 1664 von einem Edward Davenant vorgelegt (Wallisii *Algebra cap.* 10. *Oxon.* 1693, *anglice ed.* 1685). Wallis muſs damals (1693) von Hugenius Arbeit Nichts gewuſst haben, denn er sagt: „*quia non video quempiam eandem rem ex professo tractasse.*" Durch Wallis Methode erhält man sowohl die Hauptbrüche als die eingeschalteten Nebenbrüche

man denselben leicht in einen Kettenbruch der verlangten Art verwandeln. Es sei a die gröfste in $\frac{A}{B}$ enthaltene ganze Zahl, so dafs $A = aB + C$ und $C < B$ ist, ferner a_1 die gröfste, in dem Quotienten $\frac{B}{C}$ enthaltene ganze Zahl, so dafs $B = a_1 C + D$ ist, eben so sei $C = a_2 D + E$ u. s. w., so hat man

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 \text{ etc.}}} \quad (\S.\ 2.),$$

(§. 13. und 15.): so findet er als Näherungswerthe des Bruches $\frac{2684769}{8376571}$ die Brüche $\frac{1}{3}, \frac{9}{28}, \frac{17}{53}, \frac{25}{78}, \ldots$, die gröfser als der wahre Werth sind, und die Brüche $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{4}{13}, \frac{5}{16}, \frac{6}{19}, \frac{7}{22}, \frac{8}{25}, \ldots$, die kleiner als derselbe sind. Sucht man die Näherungswerthe nach Hugenius Verfahren, so hat man:

$$8376571 = 3 . 2684769 + 322264,$$
$$2684769 = 8 . \ 322264 + 106657,$$
$$322264 = 3 . \ 106657 + \ 2293,$$

der Anfang des Kettenbruchs ist also

$$0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}$$

und die ersten Näherungswerthe

$$\frac{0}{1}, \frac{3.0+1}{3.1} = \frac{1}{3}, \quad \frac{8.1+0}{8.3+1} = \frac{8}{25}, \quad \frac{3.8+1}{3.25+3} = \frac{25}{78}.$$

Als eingeschaltete Nebenbrüche erhält man

$$\frac{1.1+0}{1.3+1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{2.1+0}{2.3+1} = \frac{2}{7}, \quad \frac{3.1+0}{3.3+1} = \frac{3}{10}, \quad \frac{4.1+0}{4.3+1} = \frac{4}{13}, \quad \frac{5.1+0}{5.3+1} = \frac{5}{16}, \quad \frac{6.1+0}{6.3+1} = \frac{6}{19},$$

$$\frac{7.1+0}{7.3+1} = \frac{7}{22}, \quad \text{ferner} \quad \frac{1.8+1}{1.25+3} = \frac{9}{28}, \quad \frac{2.8+1}{2.25+3} = \frac{17}{53}.$$

Es läfst sich hiernach vermuthen, dafs schon Davenant Hugenius Verfahren angewandt hat, denn Wallis sagt: *„sed et Davenantius methodum habuit ipse hujusmodi approximationes, non omnes quidem, sed praecipuas investigandi."* Bedenkt man nemlich, dafs die Theorie der Nebenbrüche erst durch Lagrange (*Mém. de l'ac. de Berlin* 1767) entwickelt worden ist, so wird es sehr wahrscheinlich, dafs Davenant nur die Hauptbrüche auf dieselbe Weise wie Hugenius fand, und dafs gerade diese Wallis *praecipuas* nennt. Euler scheint Hugenius Aufsatz gar nicht gekannt zu haben, und von selbst auf dieselbe Methode gekommen zu sein; er erwähnt überall nur Wallis Auflösung im Gegensatz zu der seinigen. So z. B. (*Nov. comm. ac. Petr. T.* 11.) in dem Aufsatze: *De usu nov. algor.* §. 7. sagt er: *„quod problema olim feliciter a Wallisio solutum equidem quoque jam dudum per fractiones continuas multo commodius expedivi.* Man vergleiche auch den Aufsatz: *De fractionibus continuis* §. 14. in *Comm. ac. Petr. T.* 9. und *Introd. in an. inf.* §. 382. Keinesweges aber hat Wallis, wie Waring sagt (*Meditat. algebr. pag.* 178.), die Hugenius'sche Methode erfunden.

und wenn man die Näherungswerthe dieses Kettenbruchs entwickelt, so erhält man Brüche, die dem Werthe $\frac{A}{B}$ näher kommen, als jeder andere Bruch mit nicht gröſserem Nenner.

Auſserdem hat man bei Anwendung dieser Kettenbrüche zur Bestimmung der Wurzeln den Vortheil, daſs jede zwei auf einander folgende Näherungswerthe Gränzen sind, innerhalb welcher die Wurzel liegt, da diese Näherungswerthe abwechselnd gröſser oder kleiner sind, und man daher die Gränzen des Fehlers bestimmen kann, den man begeht, wenn man statt des wahren Werthes einen Näherungswerth nimmt (§. 15.). Die Kettenbrüche, deren Zähler der Einheit gleich und deren Nenner ganze positive Zahlen sind, haben einen irrationalen Werth, wenn sie ins Unendliche fortlaufen (§. 64. I.). Ist daher die Wurzel einer Gleichung rational, so muſs der ihr entsprechende Kettenbruch nothwendig irgendwo abbrechen und ein endlicher sein, läuft der Kettenbruch ins Unendliche fort, so folgt daraus, daſs die Wurzel irrational ist.

87.

Man nehme nun zuerst an, daſs die gegebene Gleichung:

$$(a.)\quad f(x) = Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$$

nur reelle Wurzeln enthält. Man suche also vermittelst des Theorems (A.) die Gränzen, innerhalb welcher die Wurzeln enthalten sind, die nur um eine Einheit verschieden sind, diese Gränzen seien a und $a+1$.

Es soll nun zuerst der Fall betrachtet werden, wenn zwischen diesen Gränzen nur eine Wurzel liegt; es ist also a ein Näherungswerth dieser Wurzel. Man setze daher $x = a + \frac{1}{x_{,}}$, wenn a positiv ist, und $x = a - \frac{1}{x_{,}}$, wenn a negativ ist. In jedem Falle ist also x_1 positiv und gröſser als 1. Substituirt man den Werth $a \pm \frac{1}{x_{,}}$ statt x in der gegebenen Gleichung, so erhält man eine neue Gleichung

$$(b.)\quad F(x_1) = 0.$$

Diese Gleichung kann nur eine reelle positive Wurzel haben, die gröſser als 1 ist, denn hätte sie zwei $x_{,}$ und $x_{,,}$, so hätte auch x zwischen den Gränzen a und $a+1$ zwei reelle Wurzeln $a \pm \frac{1}{x_{,}}$, $a \pm \frac{1}{x_{,,}}$, gegen die Voraussetzung. Man bestimme wieder die Gränzen a_1 und a_1+1, zwischen welchen x_1 liegt, und setze $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$. Substituirt man diesen Werth in

(*b*.), so erhält man eine neue Gleichung:

$$(a.) \quad \varphi(x_2) = 0.$$

Diese Gleichung kann ebenfalls wieder nur einen reellen positiven Werth haben, der gröfser als 1 ist. Man kann wieder seine Gränzen a_2 und a_2+1 bestimmen, und indem man so fortfährt, erhält man den Näherungswerth:

$$x = F(a + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \text{etc.}).$$

Sind aber zwischen den Gränzen a und $a+1$ mehr als eine reelle Wurzel, allenfalls n reelle Wurzeln enthalten, so haben diese alle den gemeinschaftlichen Näherungswerth a. Setzt man daher

$$x = a \pm \frac{1}{x_1},$$

so mufs die dadurch entstehende Gleichung:

$$(b.) \quad F(x_1) = 0,$$

n Wurzeln haben, die positiv und gröfser als 1 sind. Hätte sie mehr oder weniger, so würde auch x mehr oder weniger als n reelle Wurzeln zwischen den Gränzen a und $a+1$ haben, gegen die Voraussetzung. In der Regel wird nun jede Wurzel der Gleichung (*b*.) von den übrigen getrennt und zwischen besonderen Gränzen a_1 und a_1+1, b_1 und b_1+1, c_1 und $c+1$ u. s. w. enthalten sein. Man verfährt alsdann mit jeder dieser Wurzeln wie man früher mit x verfuhr, indem man durch die Substitutionen:

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_1 = b_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_1 = c_1 + \frac{1}{x_2}, \ldots.$$

n Gleichungen erhält, deren jede nothwendig nur eine reelle Wurzel, die gröfser als 1 ist, haben kann und mufs. Hierdurch findet man, indem man die Entwickelung weiter fortsetzt, die n Werthe von x so nahe als man will. Sollten aber von den n Wurzeln der Gleichung (*b*.) z. B. $n-m$ Wurzeln zwischen denselben Gränzen a_1 und a_1+1 enthalten sein, d. h. hat die Gleichung (*a*.) eine Anzahl $n-m$ von Wurzeln, deren Werthe mit den Gliedern $a + \frac{1}{a_1}$ anfangen, so substituire man nur wie früher statt x_1 den Werth $a_1 + \frac{1}{x_2}$ in (*b*.). Die dadurch entstehende Gleichung

$$(c.) \quad \varphi(x_2) = 0$$

mufs nothwendig $n-m$ reelle positive Wurzeln haben, die gröfser als 1 sind. In der Regel werden diese Wurzeln getrennt sein, d. h. jede wird zwischen zwei besonderen Gränzen a_2 und a_2+1 liegen. Sollte dies aber nicht der Fall sein, vielmehr $n-r$ Wurzeln zwischen denselben Gränzen a_2 und a_2+1 enthalten sein, so dafs die Gleichung (*a*.) $n-r$ Wurzeln hat,

deren Werthe mit $a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$ anfangen, so substituire man wieder in (*c.*) statt x_2 den Werth $a_2+\frac{1}{x_3}$, um eine neue Gleichung

$$(d.)\quad \psi(x_3)=0$$

zu bilden. Hierdurch mufs man zuletzt auf eine Gleichung kommen, in der alle Wurzeln getrennt sind, d. h. jede besonders zwischen zwei ganzen Zahlen liegt, die nur um eine Einheit verschieden sind, da nach der ursprünglichen Voraussetzung die gleichen Wurzeln ausgeschlossen sind, also die den verschiedenen Wurzeln entsprechenden Kettenbrüche nothwendig bei irgend einem Theilnenner anfangen müssen, von einander verschieden zu sein. Sobald aber die Wurzeln getrennt sind, so ist das Verfahren dasselbe, wie in dem Falle, wenn gleich von Anfang an nur eine Wurzel zwischen den Gränzen a und $a+1$ liegt, welcher Fall schon erörtert worden ist.

88.

Bildet man die Gleichung (*b.*), indem man unmittelbar in (*a.*) überall statt x den Werth $a+\frac{1}{x_1}$ substituirt, und verfährt man auf ähnliche Weise bei der Bildung der Gleichungen (*c.*), (*d.*) u. s. w., so wird die Rechnung weitläufig. Man kann aber auf eine bequemere Weise die Coefficienten der Gleichung (*b,*) aus der Gleichung (*a.*), und eben so die Coefficienten jeder der folgenden Gleichungen (*c.*), (*d.*) u. s. w. aus der unmittelbar vorhergehenden finden. Bekanntlich ist

$$(x+y)^m = x^m + \frac{\partial . x^m}{\partial x} y + \frac{\partial^2 . x^m}{1.2 \partial x^2} y + \ldots .$$

Substituirt man daher in der Gleichung (*a.*)

$$f(x) = A x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots . + A_m = 0$$

statt x überall $x+\frac{1}{x_1}$, so hat man

$$\begin{aligned}
&A\left(x^m + \frac{\partial . x^m}{\partial x} . \frac{1}{x_1} + \frac{\partial^2 . x^m}{1.2. \partial x^2} . \frac{1}{x_1^2} + \ldots .\right) \\
&+A_1\left(x^{m-1} + \frac{\partial . x^{m-1}}{\partial x} . \frac{1}{x_1} + \frac{\partial^2 . x^{m-1}}{1.2. \partial x^2} . \frac{1}{x_1^2} + \ldots .\right) \\
&+A_2\left(x^{m-2} + \frac{\partial . x^{m-2}}{\partial x} . \frac{1}{x_1} + \frac{\partial^2 . x^{m-2}}{1.2. \partial x^2} . \frac{1}{x_1^2} + \ldots .\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} . \frac{1}{x_1} + \frac{\partial^2 f(x)}{1.2. \partial x^2} . \frac{1}{x_1^2} + \ldots . + \frac{\partial^m f(x)}{1.2. \ldots . m \partial x^m} . \frac{1}{r_1^m} .
\end{aligned}$$

Setzt man in dem letzteren Ausdrucke statt x überall a, so ist das Resultat dasselbe, als wenn man in der Gleichung (a.) statt x überall $a+\frac{1}{x_1}$ gesetzt hätte, man hat also

$$f(a)+\frac{\partial f(a)}{\partial a}\cdot\frac{1}{x_1}+\frac{\partial^2 f(a)}{1.2.\partial a^2}\cdot\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^m f(a)}{1.2\ldots m.\partial a^m}\cdot\frac{1}{x_1^m}=0,$$

oder

$$(b.)\quad f(a)x_1^m+\frac{\partial f(a)}{\partial a}x_1^{m-1}+\ldots+\frac{\partial^m f(a)}{1.2\ldots m.\partial a^m}=0.$$

Man erhält also die Coefficienten der Gleichung (b.), indem man die successiven Differenziale von $f(x)$ nimmt, und dann statt x überall a substituirt. Eben so erhält man die Coefficienten der Gleichung (c.), indem man die successiven Differenziale von $F(x_1)$ nimmt und dann statt x_1 überall a_1 substituirt u. s. w. Man bemerke noch aufserdem, dafs man die Gröfsen $f(a)$, $\frac{\partial f(a)}{\partial a}$, ... $f(a_1)$, $\frac{\partial f(a_1)}{\partial a_1}$, ... nicht erst besonders zu berechnen braucht, sondern dafs sie schon wegen der Gränzenbestimmung berechnet sein müssen. Denn indem man z. B. die Gränzen a und $a+1$ bestimmt, so mufs hierzu die Zeichenreihe [a] und also auch der Werth der Gröfsen $\frac{\partial^m f(a)}{\partial a^m}$, $\frac{\partial^{m-1} f(a)}{\partial a^{m-1}}$ u. s. w. bestimmt werden. Man wird daher wohl thun, bei Bestimmung der Zeichenreihen unter jedes Zeichen den Zahlenwerth der entsprechenden Function zu setzen, wie dies auch im Folgenden geschehen soll.

89.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, soll die Gleichung

$$(a.)\quad f(x)=x^3-7x+7=0\ ^{*})$$

aufgelöst werden. Hier hat man

$$f(x)=x^3-7x+7,\quad \frac{\partial f(x)}{\partial x}=3x^2-7,\quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}=6.$$

Ferner

$$[-10]=\overset{+}{6}\ \overset{-}{60}\ \overset{+}{293}\ \overset{-}{923}$$

$$[-1]=\overset{+}{6}\ \overset{-}{6}\ \overset{-}{4}\ \overset{+}{13}$$

$$[0]=\overset{+}{6}\ 0\ \overset{-}{7}\ \overset{+}{7}$$

---

*) Lagrange *Rés. des équat. num. chap.* 4.

$$[1] = \overset{+}{6}\;\overset{+}{6}\;\overset{-}{4}\;\overset{+}{1}$$

$$[10] = \overset{+}{6}\;\overset{+}{60}\;\overset{+}{293}\;\overset{+}{937}$$

Es ist also eine Wurzel zwischen -10 und -1 enthalten, zwei liegen zwischen 1 und 10. Man ziehe nun die Gränzen enger zusammen, so findet man

$$[-4] = \overset{+}{6}\;\overset{-}{24}\;\overset{+}{41}\;\overset{-}{29}$$

$$[-3] = \overset{+}{6}\;\overset{-}{18}\;\overset{+}{20}\;\overset{+}{1}$$

eine Wurzel liegt also zwischen -3 und -4.

Ferner findet man

$$[2] = \overset{+}{6}\;\overset{+}{12}\;\overset{+}{5}\;\overset{+}{1}$$

also liegen zwei Wurzeln zwischen 1 und 2.

Um die Wurzel, die zwischen -3 und -4 liegt, weiter zu entwickeln, setze man $x = -3 - \frac{1}{x_1}$, so erhält man die Gleichung

$$(-x_1)^3 + 20(-x_1)^2 - \frac{18}{2} . -x_1 + \frac{6}{2.3} = 0,$$

oder

$$(b) \qquad x_1^3 - 20x_1^2 - 9x_1 - 1 = 0.$$

Da $x_1 > 1$ sein mufs (§. 87.), so braucht man nur die Zahlen, die gröfser als 1 sind, zur Gränzenbestimmung anzuwenden. Man hat

$$F(x_1) = \quad x_1^3 - 20x_1^2 - 9x_1 - 1,$$

$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x} = 3x_1^2 - 40x_1 - 9,$$

$$\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x^2} = 6x_1 - 40,$$

$$\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} = 6,$$

also

$$[\ 1] = \overset{+}{6}\;\overset{-}{34}\;\overset{-}{46}\;\overset{-}{29}$$

$$[10] = \overset{+}{6}\;\overset{+}{20}\;\overset{-}{109}\;\overset{-}{1091}$$

$$[20] = \overset{+}{6}\;\overset{+}{80}\;\overset{+}{391}\;\overset{-}{181}$$

$$[30] = \overset{+}{6}\;\overset{+}{140}\;\overset{+}{1491}\;\overset{+}{8729}$$

Es liegt also eine Wurzel der Gleichung (*b.*) zwischen 20 und 30. Nun hat man:

$$[21] = \overset{+}{6}\ \overset{+}{86}\ \overset{+}{374}\ \overset{+}{251}$$

also liegt diese Wurzel zwischen 20 und 21.

Setzt man $x_1 = 20 + \frac{1}{x_2}$, so erhält man die neue Gleichung:

$$-181\,x_2^3 + 391\,x_2^2 + \frac{80}{2}.x_2 + \frac{6}{2.3} = 0,$$

oder

$$181\,x_2^3 + 391\,x_2^2 - 40\;x_2 - 1 \;= 0,$$

woraus man wieder den Werth von x_2 bestimmen kann u. s. w.

Um auch die Wurzeln, die zwischen 1 und 2 liegen, weiter zu entwickeln, setze man:

$$x = 1 + \frac{1}{x_1},$$

so erhält man:

$$(b.)\quad x_1^3 - 4x_1^2 + 3x_1 + 1 = 0,$$

also

$$F(x) = x_1^3 - 4x_1^2 + 3x_1 + 1,$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = 3x_1^2 - 8x_1 + 3,$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = 6x_1 - 8,$$

$$\frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3} = 6,$$

$$[1] = \overset{+}{6}\ \overset{-}{2}\ \overset{-}{2}\ \overset{+}{1}$$

$$[2] = \overset{+}{6}\ \overset{+}{4}\ \overset{-}{1}\ \overset{-}{1}$$

$$[3] = \overset{+}{6}\ \overset{+}{10}\ \overset{+}{6}\ \overset{+}{1}$$

es liegt also eine Wurzel zwischen 1 und 2, eine andere zwischen 2 und 3, d. h. ein Werth von x fängt mit $1 + \frac{1}{1}$, der andere mit $1 + \frac{1}{2}$ an. Die Wurzeln sind nun getrennt, und man kann jede besonders weiter entwickeln, je nachdem $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$ oder $x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}$ setzt.

90.

Im vorhergehenden Beispiel wurde stillschweigend angenommen, dafs die zwei zwischen den Gränzen 1 und 2 angedeuteten Wurzeln reell sind, es hätte aber auch sein können, dafs der Verlust der zwei Zeichen-

wechsel auf zwei imaginäre Wurzeln gedeutet hätte, da das Theorem (*A.*) im Allgemeinen über die Natur der Wurzeln nicht entscheidet. Es bleibt daher noch die Frage übrig, wie man in jedem Falle über die Natur der Wurzeln Gewifsheit erlangen kann. Man nehme an, es seien zwischen den Gränzen a und $a+1$, n Wurzeln der Gleichung:

$$(a.) \quad f(x) = 0$$

angedeutet, so kann über die Natur der Wurzeln nur dann Zweifel entstehen, wenn $n > 1$ ist. Wir wollen zuerst den einfachsten Fall betrachten, wenn $n = 2$ ist. Man verfahre eben so, als ob man die Gewifsheit hätte, dafs die Wurzeln reell sind und setze daher $x = a \pm \frac{1}{x_1}$, wodurch man eine neue Gleichung:

$$(b.) \quad F(x_1) = 0$$

erhält. Sind die Wurzeln wirklich reell, so mufs die Gleichung (*b.*) zwei Wurzeln haben, die gröfser als die Einheit sind. Man bestimme daher die Gränzen dieser Wurzeln durch das Theorem (*A.*). Findet man wirklich zwei solche Wurzeln, die von einander getrennt sind, so weifs man, dafs die Wurzeln der Gleichung (*a.*) reell sind, hat aber (*b.*) nicht zwei Wurzeln, die gröfser als 1 sind, so folgt daraus von selbst, dafs die Wurzeln der Gleichung (*a.*) imaginär sind. Es kann nur dann ein Zweifel über die Natur der Wurzeln bleiben, wenn die Wurzeln der Gleichung (*b.*) wieder zwischen denselben ganzen Zahlen a_1 und a_1+1 liegen; alsdann setze man: $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$, wodurch man eine neue Gleichung:

$$(c.) \quad \varphi(x_2) = 0$$

erhält. Man suche alsdann wieder, ob die Gleichung (*c.*) zwei reelle positive Wurzeln hat, die gröfser als 1 sind. Findet man wirklich zwei solche, die getrennt sind, so folgt hieraus wieder, dafs die Wurzeln der Gleichung (*a.*) reell sind; findet man dafs die Gleichung (*c.*) keine zwei solche Wurzeln hat, so sind die Wurzeln der Gleichung (*a.*) sicher imaginär. Es kann aber auch wieder der Fall eintreten, dafs zwei Wurzeln der Gleichung (*c.*) zwischen denselben Gränzen a_2 und a_2+1 angedeutet werden, so dafs $a_2 \geqq 1$ ist. In diesem Falle setze $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$, wodurch man eine neue Gleichung:

$$(d.) \quad \chi(x_3) = 0$$

erhält, die man wieder wie die früheren behandelt. Auf diese Weise kommt man zuletzt an irgend eine Gleichung (*g.*), deren Wurzeln getrennt

sind, oder die bestimmt keine zwei Wurzeln hat, die größer als 1 sind; sobald man an eine solche Gleichung gekommen ist, ist auch die Frage über die Natur der Wurzeln gelöst. Daſs man aber nothwendig an eine solche Gleichung kommen muſs, ist einleuchtend. Denn in keinem Falle können die Gleichungen (*a.*), (*b.*), (*c.*), (*d.*) u. s. w. ins Unendliche fort, so beschaffen sein, daſs immer die zwei Wurzeln derselben, zwischen denselben zwei ganzen positiven Zahlen, die nur um eine Einheit verschieden sind, liegen, weil sonst diese Wurzeln irrational und gleich wären; gleiche Wurzeln können aber, nach der Voraussetzung, nicht vorhanden sein. Es müssen also in jedem Falle die Wurzeln einer der abgeleiteten Gleichungen so beschaffen sein, daſs sie nicht zwischen denselben Gränzen n und $n+1$ liegen, sondern daſs sie entweder zwischen verschiedenen Gränzen α und $\alpha+1$, β und $\beta+1$ liegen (wo α, β ganze positive Zahlen sind), oder, daſs nicht beide Wurzeln gröſser als 1 sind. In der Regel wird die Ableitung einiger Gleichungen hinreichen, um über die Natur der Wurzeln zu entscheiden. Zuweilen wird man viele Gleichungen ableiten müssen, namentlich wenn die ersten Theilnenner in den Werthen der zwei reellen Wurzeln auf eine groſse Weite hin einander gleich sind, immer aber führt das angegebene Verfahren sicher zum Zweck.

91.

Es sei z. B. die Gleichung

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0 \text{ *)}$$

gegeben. Hier ist

$$f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101,$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=5x^4-12x^3-72x^2+190x-46,$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=20x^3-36x^2-144x+190,$$

$$\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}=60x^2-72x-144,$$

$$\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4}=120x-72,$$

$$\frac{\partial^5 f(x)}{\partial x^5}=120.$$

Bestimmt man die Gränzen der Wurzeln vermittelst des Theorems (*A.*), so findet man, daſs eine Wurzel zwischen -10 und -1, eine zwi-

*) *Analyse des équat. pag.* 145.

schen —1 und 0 und eine zwischen 3 und 10 liegt. Zwei Wurzeln werden zwischen 2 und 3 angedeutet; man hat nemlich:

$$[2] = \overset{+}{120}\;\overset{+}{168}\;\overset{-}{48}\;\overset{-}{82}\;\overset{+}{30}\;\overset{-}{21}$$

$$[3] = \overset{+}{120}\;\overset{+}{288}\;\overset{+}{180}\;\overset{-}{26}\;\overset{-}{43}\;\overset{-}{32}$$

Um zu entscheiden, ob diese zwei Wurzeln reell oder imaginär sind, setze man:

$$x = 2 + \frac{1}{x_1},$$

so findet man:

$$-21x_1^5 + 30x_1^4 - \frac{82}{2}x_1^3 - \frac{48}{2.3}x_1^2 + \frac{168}{2.3.4}x_1 + \frac{120}{2.3.4.5} = 0,$$

oder

$$21x_1^5 - 30x_1^4 + 41x_1^3 + 8x_1^2 - 7x_1 - 1 = 0,$$

also hat man:

$$F(x_1) = 21x_1^5 - 30x_1^4 + 41x_1^3 + 8x_1^2 - 7x_1 - 1,$$

$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} = 105x_1^4 - 120x_1^3 + 123x_1^2 + 16x_1 - 7,$$

$$\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x_1^2} = 420x_1^3 - 360x_1^2 + 246x_1 + 16,$$

$$\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} = 1260x_1^2 - 720x_1 + 246,$$

$$\frac{\partial^4 F(x_1)}{\partial x_1^4} = 2520x_1 + 720,$$

$$\frac{\partial^5 F(x_1)}{\partial x_1^5} = 2520,$$

und

$$[1] = + + + + + +$$

Die Gleichung $F(x_1) = 0$ hat also keine Wurzel, die gröfser als 1 ist, folglich müssen die zwei Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ imaginär sein.

92.

Die Betrachtung des allgemeinen Falls, wenn zwischen den Gränzen a und $a+1$, n Wurzeln angedeutet werden, hat nun weiter keine Schwierigkeit. Man bilde die Gleichung:

$$(b) \quad F(x_1) = 0,$$

indem man statt x den Werth $a \pm \frac{1}{x_1}$ substituirt. Im Allgemeinen wird man nun finden, dafs (b.) $n-2r$ (wo r auch gleich Null sein kann) Wurzeln zwischen den Gränzen 1 und ∞ haben kann, also hat (a.) $2r$ imaginäre Wurzeln. Von den $n-2r$ Wurzeln werden $n-2r-t$ getrennt

sein (wo t auch $= 0$ sein kann), t werden zwischen denselben Grenzen a_1 und a_1+1 enthalten sein. Um über die Natur dieser t Wurzeln Gewifsheit zu erhalten, setze man $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ und bilde die Gleichung:

$$(c.) \quad F(x_2) = 0.$$

Hat $(c.)$ t Wurzeln, die zwischen 1 und ∞ liegen, und getrennt sind, so sind die fraglichen t Wurzeln reell, hat $(c.)$ keine solche Wurzel, so sind die t Wurzeln imaginär. Sollten aber einige der Wurzeln der Gleichung $(c.)$ wieder nicht getrennt sein, so bilde man eine neue Gleichung:

$$(d.) \quad \varphi(x_3) = 0,$$

und indem man so fortfährt, kommt man nothwendig zuletzt dahin, die Natur aller Wurzeln mit Sicherheit zu erfahren. Es sei z. B. die Gleichung:

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0\,^{*})$$

gegeben. Man hat also:

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1,$$
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2,$$
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 20x^3 + 12x^2 + 6x - 4,$$
$$\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 60x^2 + 24x + 6,$$
$$\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} = 120x + 24,$$
$$\frac{\partial^5 f(x)}{\partial x^5} = 120,$$

und

$$[-1] = \overset{+}{120}\;\overset{-}{96}\;\overset{+}{42}\;\overset{-}{18}\;\overset{+}{10}\;\overset{-}{6}$$
$$[0] = \overset{+}{120}\;\overset{+}{24}\;\overset{+}{6}\;\overset{-}{4}\;\overset{+}{2}\;\overset{-}{1}$$
$$[1] = \overset{+}{120}\;\overset{+}{144}\;\overset{+}{90}\;\overset{+}{34}\;\overset{+}{10}\;\overset{+}{2}$$

Hier werden zwei Wurzeln zwischen -1 und 0, und drei zwischen 0 und 1 angedeutet. Um zuerst die Natur der zwischen -1 und 0 enthaltenen Wurzeln zu untersuchen, setze man:

$$x = 0 - \frac{1}{x_1},$$

*) *Analyse des équat. pag.* 145.

so erhält man:

$$-(-x_1)^5+2(-x_1)^4-\frac{4}{2}(-x_1)^3+\frac{6}{2.3}(-x_1)^2+\frac{24}{2.3.4}(-x_1)+\frac{120}{2.3.4.5}=0,$$

oder

$$x_1^5+2x_1^4+2x_1^3+x_1^2-x_1+1 = 0,$$

also

$$F(x_1) = x_1^5+2x_1^4+2x_1^3+x_1^2-x_1+1,$$
$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} = 5x_1^4+8x_1^3+6x_1^2+2x_1-1,$$
$$\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x_1^2} = 20x_1^3+24x_1^2+12x_1+2,$$
$$\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} = 60x_1^2+48x_1+12,$$
$$\frac{\partial^4 F(x_1)}{\partial x_1^4} = 120x_1+48,$$
$$\frac{\partial^5 F(x_1)}{\partial x_1^5} = 120.$$

Hier ist

$$[1] = + + + + + +$$

folglich sind die zwei zwischen -1 und 0 liegenden Wurzeln imaginär.

Von den drei Wurzeln, die zwischen 0 und 1 liegen, ist in jedem Falle eine reell. Um die Natur der beiden anderen zu erfahren, setze man $x=0+\frac{1}{x_1}$, so erhält man die Gleichung

$$x_1^5-2x_1^4+2x_1^3-x_1^2-x_1-1 = 0,$$

also

$$F(x_1) = x_1^5-2x_1^4+2x_1^3-x_1^2-x_1-1,$$
$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} = 5x_1^4-8x_1^3+6x_1^2-2x_1-1,$$
$$\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x_1^2} = 20x_1^3-24x_1^2+12x_1-2,$$
$$\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} = 60x_1^2-48x_1+12,$$
$$\frac{\partial^4 F(x_1)}{\partial x_1^4} = 120x_1-48,$$
$$\frac{\partial^5 F(x_1)}{\partial x_1^5} = 120,$$

und man findet

$$[1] = \underset{120}{+}\ \underset{72}{+}\ \underset{24}{+}\ \underset{6}{+}\ \underset{0}{0}\ \underset{2}{-}$$

Die Zeichenreihe [1] ist unvollständig, und kann also nicht unmittelbar mit einer anderen Zeichenreihe verglichen werden, man mufs daher die Zeichenreihe $[1+\partial.1]$ suchen (§. 82.). Es ist

$$[1+\partial.1] = +++++-$$

ferner

$$[\infty] = ++++++$$

Es liegt also zwischen 1 und ∞ nur eine Wurzel der Gleichung ($b.$), folglich müssen zwei der drei Wurzeln, die zwischen 0 und 1 liegen, imaginär sein, d. h. die Gleichung ($a.$) hat nur eine reelle Wurzel, und diese liegt zwischen 0 und 1.

93.

Lagrange hat ein Mittel angegeben, die Theilnenner a_n, a_{n+1} u. s. w. von einer gewissen Grenze an zu finden, ohne dafs man die Wurzeln der entsprechenden Gleichungen

$$\varphi(x_n) = 0, \quad \chi(x_{n+1}) = 0 \text{ u. s. w.}$$

zu suchen braucht. Ein solches Mittel war bei seiner Methode um so nothwendiger, weil das Aufsuchen der Wurzeln gerade der schwierigste Theil derselben ist. Bei unserer Methode ist das Bedürfnifs desselben freilich weniger fühlbar, aber es kann doch mit grofsem Nutzen angewandt werden, weil man durch dasselbe, je weiter man in der Rechnung fortgeht, auch desto mehr Theilnenner durch eine einzige Operation erhält, ohne die Wurzeln der diesen Theilnennern entsprechenden Gleichungen suchen zu müssen.

Diese Verbesserung Lagrange's besteht, genau betrachtet, in nichts Anderem, als in der Verbindung der Neutonschen Annäherungsmethode mit dem Gebrauche der Kettenbrüche, und leidet an derselben Unvollkommenheit, wie diese. Bekanntlich besteht das Wesentliche der Neutonschen Methode in Folgendem. Kennt man schon einen Näherungswerth p der Wurzel einer Gleichung $f(x) = 0$, so setzt man $x = p + \omega$, wodurch man nach dem Taylorschen Lehrsatze die Gleichung

$$f(p) + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\omega + \frac{\partial^2 f(p)}{2\partial p^2}\omega^2 + \ldots.$$

erhält, und wenn man die Glieder, in welchen höhere Potenzen von ω vorkommen, vernachlässigt, so hat man

$$f(p) + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\omega = 0, \text{ oder } \omega = -\frac{f(p).\partial p}{\partial f(p)},$$

woraus man den neuen Näherungswerth

$$x = p - \frac{f(p).\partial p}{\partial f(p)}$$

erhält. Auf ähnliche Weise kann man verfahren, wenn man mit Hülfe der Kettenbrüche schon einen Näherungswerth gefunden hat, um einen oder mehrere der folgenden zu finden. Man nehme an, es sei die Gleichung $f(x) = Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$ gegeben, und man habe den Näherungswerth

$$x = F(a + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n) = \frac{a, a_n}{a_1, a_n}$$

gefunden, der wahre Werth sei

$$x = F(a + 1 : a + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n + 1 : 2),$$

so sind die Gröfsen

$$\frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}} = \frac{p^0}{q^0}, \quad \frac{a, a_n}{a_1, a_n} = \frac{p}{q}$$

zwei auf einander folgende Näherungswerthe von x, und der wahre Werth ist

$$x = \frac{z.a, a_n + a, a_{n-1}}{z.a_1, a_n + a_1, a_{n-1}} \text{ (§. 7. und §. 16.) } = \frac{z.p + p^0}{z.q + q^0}$$

oder

$$1. \quad z = -\frac{q^0}{q} + \frac{(pq^0 - p^0 q)}{q^2}\left(\frac{1}{\frac{p}{q} - x}\right).$$

Nach der Neutonschen Methode findet man aber, wenn man $x = \frac{p}{q} + \omega$ setzt, den Näherungswerth

$$x = \frac{p}{q} - \frac{f\left(\frac{p}{q}\right).\partial\left(\frac{p}{q}\right)}{\partial f\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Substituirt man nun diesen Werth statt x in (1.), so hat man

$$2. \quad z = -\frac{q^0}{q} + \frac{(pq^0 - p^0 q)}{q^2}.\frac{\partial f\left(\frac{p}{q}\right)}{f\left(\frac{p}{q}\right)\partial\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Dieser Werth von z kann noch auf andere Weise ausgedrückt werden. Substituirt man nemlich in der Gleichung $f(x) = 0$, statt x den Werth $\frac{pz + p^0}{qz + q^0}$, so erhält man, nach gehöriger Reduction, eine neue Gleichung

$$Bz^m + B_1 z^{m-1} + \ldots B_m = 0,$$

deren Coefficienten mit denen der Gleichung $\chi(x_{n+1}) = 0$ nothwendig identisch sind. Man findet aber

$$3. \quad B = Ap^m + A_1.p^{m-1}.q + A_2.p^{m-2}.q^2 + \ldots + A_m.q^m.$$

$$4.\quad \left.\begin{aligned} B_1 = m.A.p^{m-1}.p^0 + (m-1)A_1.p^{m-2}.q.p^0 + (m-2)A_2.p^{m-3}.q^2.p^0 + \ldots\\ \ldots + A_1.p^{m-1}.q^0 + 2A_2.p^{m-2}.q.q^0 + 3A_3.p^{m-3}.q^2.q^0 + \ldots \end{aligned}\right\}.$$

Hieraus folgt

$$mBq^0 - B_1.q = (pq^0 - p^0 q)[mAp^{m-1} + (m-1)A_1.p^{m-2}.q + (m-2)A_2.p^{m-3}.q^2 + \ldots];$$

es ist aber

$$\frac{\partial f\left(\frac{p}{q}\right)}{\partial\left(\frac{p}{q}\right) f\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{mAp^{m-1} + (m-1)A_1.p^{m-2}.q + \ldots}{Ap^m + A_1.p^{m-1}.q + \ldots} \times q$$

$$= \frac{1}{pq^0 - p^0 q}\left(mq^0 - \frac{B^1}{B}.q\right).q,$$

folglich

$$5.\quad z = (m-1)\frac{q^0}{q} - \frac{B^1}{B}.$$

Dies ist die Lagrangesche (Legendresche) Formel. Verwandelt man den Werth von z in einen Kettenbruch, so findet man hierdurch einen oder mehrere der auf a_m folgenden Theilnenner.

Das Neutonsche und das darauf gegründete Lagrangesche Verfahren haben die Unvollkommenheit, daſs man Glieder vernachlässigt, deren Werth und Einfluſs auf das Resultat man nicht kennt, und dieser Umstand ist bekanntlich gerade die Ursache, weswegen Lagrange die Neutonsche Methode als unbrauchbar verworfen hat *). Freilich hat Lagrange Mittel angegeben, wodurch man eine Grenze der vernachlässigsten Gröſse bestimmen kann. Immer aber bleibt man darüber in Ungewiſsheit, wie viel Theilnenner des Kettenbruchs, der den Werth von z angiebt, auch dem wahren Werth angehören. Das Lagrangesche Verfahren ist aber, eben so wie das Neutonsche, einer weiteren Ausbildung fähig. Hierzu braucht man nur zwei Grenzen zu finden, zwischen welchen jedesmal z eingeschlossen ist; entwickelt man die Werthe dieser Grenzen in Kettenbrüche, so gehören die ersten Theilnenner, die beiden gemeinchaftlich sind, nothwendig dem wahren Werthe von z an. Zur Auffindung dieser Grenzen führen folgende Betrachtungen.

94.

Die Untersuchungen über die Realität der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ müssen uns, nach den früheren Erörterungen, wenn wirklich reelle Wurzeln vorhanden sind, jedesmal zu einer Gleichung $\varphi(x_n) = 0$

---

*) *Résol. des équat. num. Note V.*

führen, die so beschaffen ist, dafs innerhalb der Grenzen a_n und $a_n + 1$ nur Eine reelle Wurzel derselben liegt, wenn die Wurzeln nicht schon in der Gleichung $f(x) = 0$ selbst getrennt sind. Entwickelt man dann die neue Gleichung $\chi(x_{n+1}) = 0$, indem man $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$ setzt, so mufs diese letztere Gleichung eine und *nur* eine reelle Wurzel haben, die > 1 ist; ist diese Wurzel zwischen den Grenzen a_{n+1} und $a_{n+1} + 1$ enthalten, so mufs die Zeichenreihe $[a_{n+1} + 1]$ nur positive Zeichen enthalten, weil zwischen $a_{n+1} + 1$ und ∞ keine Wurzel liegt: dagegen mufs in der Zeichenreihe $[a_{n+1}]$ ein und *nur* ein Zeichenwechsel vorkommen. Eben so wird die folgende Gleichung $\psi(x_{n+2}) = 0$, die durch die Substitution $x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}}$ entsteht, eine und *nur* eine reelle Wurzel haben, die > 1 ist, und wenn diese zwischen den Grenzen a_{n+2} und $a_{n+2} + 1$ eingeschlossen ist, so mufs wieder $[a_{n+2} + 1]$ nur positive Zeichen, $[a_{n+2}]$ einen Zeichenwechsel enthalten, u. s. w. fort. *Man wird aber nothwendig an eine Gleichung*

$$F(x_{n+r}) = 0$$

kommen, deren einzige reelle Wurzel zwischen den Grenzen a_{n+r} und $a_{n+r} + 1$ eingeschlossen ist, und *die so beschaffen ist, dafs die Zeichenreihen nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sind*, so dafs man

$$[a_{n+r}] \quad = \ldots . + + -$$
$$[a_{n+r} + 1] = \ldots . + + +$$

hat. Die Gleichung $\chi(x_{n+r}) = 0$ ist nemlich, wie gesagt, so beschaffen, dafs sich in der Zeichenreihe $[a_{n+1}]$ nur *ein* negatives Zeichen befindet, dem ein positives Zeichen folgt oder vorausgeht; entspricht nun dieses negative Zeichen z. B. der Function $\frac{\partial^r \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+r}^r}$, so folgt hieraus, dafs die aus den dieser Function vorhergehenden Functionen gebildeten Gleichungen

$$\frac{\partial^{r+1} \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^{r+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{r+1} \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^{r+2}} = 0 \text{ u. s. w.}$$

zwischen den Grenzen a_{n+1} und $a_{n+1} + 1$ keine Wurzel haben, weil beide Zeichenreihen, wenn man sie nur bis zu diesen Functionen entwickelt, nur positive Zeichen enthalten. Dagegen werden die Gleichungen

$$\frac{\partial^r \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^r} = 0, \quad \frac{\partial^{r-1} \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^{r-1}} = 0 \ldots . \frac{\partial \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

eben so wie $\chi(x_{n+1})=0$ zwischen den Grenzen a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ eine Wurzel haben. Es könnte nun sein, daſs die Gleichung $\chi(x_{n+1})=0$ mit einer oder mehreren der übrigen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel hätte, so daſs z. B. $\chi(\alpha)=0$, $\frac{\partial^r\chi(\alpha)}{\partial\alpha^r}=0$ und $\alpha \begin{smallmatrix} > a_{n+1} \\ < a_{n+1}+1 \end{smallmatrix}$ wäre; wir abstrahiren aber von diesem Falle, weil eine solche Wurzel bekanntlich leicht entdeckt werden kann, indem man den gemeinschaftlichen Factor von $\chi(x)$ und $\frac{\partial^r\chi(x)}{\partial x^r}$ sucht. Setzen wir daher voraus, daſs der Werth der Wurzel der Gleichung $\chi(x_{n+1})=0$ von den Werthen der Wurzeln der übrigen Gleichungen verschieden ist, so ist klar, daſs man diesen Werth zwischen Grenzen α, β einschlieſsen kann, zwischen welchen keine der Wurzeln der übrigen Gleichungen liegt. Substituirt man daher statt a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ die engeren Grenzen α und β, so müssen diese so beschaffen sein, daſs die Zeichenreihen $[\alpha]$ und $[\beta]$ nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sind. Die Entwickelung der Wurzeln durch Kettenbrüche besteht aber gerade darin, daſs man statt der gefundenen Grenzen a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ nicht unmittelbar engere Grenzen α, β setzt, sondern allmählig die Substitutionen $x_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{x_{n+2}}$, $x_{n+2}=a_{n+2}+\frac{1}{x_{n+3}}$ u. s. w. macht. Ist man nun in der Entwickelung so weit gekommen, daſs man

$$\alpha = F(a_{n+1}+1:a_{n+2}+\ldots\ldots+1:a_{n+r}),$$
$$\beta = F(a_{n+1}+1:a_{n+2}+\ldots\ldots+1:a_{n+r}+1)$$

hat, so muſs die Gleichung $F(x_{n+r})=0$, deren reelle Wurzeln zwischen den Grenzen a_{n+r} und $a_{n+r}+1$ liegen, so beschaffen sein, daſs die Zeichenreihen $[a_{n+r}]$ und $[a_{n+r}+1]$ nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sind, so daſs dieses in $[a_{n+r}]$ negativ, in $[a_{n+r}+1]$ positiv ist, d. h., daſs die Gleichungen

$$\frac{\partial F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}}=0,\quad \frac{\partial^2 F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}^2}=0 \text{ u. s. w.}$$

zwischen den Grenzen a_{n+r} und $a_{n+r}+1$ keine Wurzel haben. Denn hätte z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}^2}=0$$

zwischen diesen Grenzen eine Wurzel, so müſste auch die Gleichung, die dieser vorausgeht,

$$\frac{\partial^2 F_{,}(x_{n+r-1})}{\partial x_{n+r-1}^2} = 0,$$

zwischen den Grenzen $a_{n+r-1} + \frac{1}{a_{n+r}}$ und $a_{n+r-1} + \frac{1}{a_{n+r}+1}$ eine Wurzel haben, da ja $x_{n+r-1} = a_{n+r-1} + \frac{1}{x_{n+1}}$ gesetzt worden ist. Aus demselben Grunde müfste die Wurzel der Gleichung $\frac{\partial^2 F_{,,}(x_{n+r-2})}{\partial x_{n+r-2}^2} = 0$ zwischen $a_{n+r-2} + \cfrac{1}{a_{n+r-1} + \cfrac{1}{a_{n+r}}}$ und $a_{n+r-2} + \cfrac{1}{a_{n+r-1} + \cfrac{1}{a_{n+r}+1}}$ liegen, und würde man diese Schlufsfolge fortsetzen, so fände man zuletzt, dafs die Wurzel der Gleichung $\frac{\partial^2 \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^2} = 0$ zwischen

$$F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots . + 1 : a_{n+r}) = \alpha \text{ und}$$
$$F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots . + 1 : a_{n+r}) = \beta$$

enthalten wäre, gegen die Voraussetzung.

Sobald man aber an eine solche Gleichung $F(x_{n+r}) = 0$ gekommen ist, bei der die Zeichenreihen nur in Absicht auf das letzte Zeichen verschieden sind, kann man die Rechnung ohne Aufsuchung der Wurzeln fortsetzen.

95.

Substituirt man nemlich statt x_{n+1} die Werthe

1. $F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots . + 1 : a_{n+r})$,
2. $F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots . + 1 : a_{n+r} + 1)$,

zwischen welchen der wahre Werth von x_{n+1} liegt, so werden, nach dem Vorhergehenden, die diesen Werthen entsprechenden Zeichenreihen nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sein, weil die Gleichungen

$$\frac{\partial \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^2} = 0 \text{ u. s. w.}$$

zwischen diesen Grenzen keine Wurzeln haben können, da die Gleichungen

$$\frac{\partial F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}^2} = 0 \text{ u. s. w.}$$

keine Wurzeln zwischen den Grenzen a_{n+r} und $a_{n+r} + 1$ haben. Man bezeichne denjenigen der Werthe (1.) und (2.), der gröfser als x_{n+1} ist, durch $\frac{p'}{q'}$, denjenigen, der kleiner ist, durch $\frac{p}{q}$ (und zwar wird der Werth (1.) gröfser oder kleiner als x_{n+1} sein, je nachdem die Anzahl der Theilnenner gerade oder ungerade ist). Ferner setze man

$$F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots . + 1 : a_{n+r-1}) = \frac{p^0}{q^0},$$

und es sei der wahre Werth von x_{n+1}

$$x_{n+1} = F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \dots + 1 : \; a_{n+r} + 1 : z),$$
$$x_{n+1} = F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \dots + 1 : (a_{n+r} + 1) - 1 : z_1).$$

Nimmt man nun an, dafs der Werth (1.) kleiner als x_{n+1}, also $= \frac{p}{q}$ ist, so hat man

$$3. \quad x_{n+1} = \frac{z.p + p^0}{z.q + q^0},$$

und ferner

$$4. \quad x_{n+1} = \frac{z_1 p^1 - p^0}{z_1 q^1 - q^0}.$$

Man kann aber, vermöge eines bekannten Theorems, den Werth von x_{n+1} noch auf andere Weise andeuten. Hat man nemlich eine Function $\chi(x+y)$, so kann diese auf folgende Weise entwickelt werden:

$$\chi(x+y) = \chi(x) + y.\frac{\partial\chi(u)}{\partial u},$$
$$\chi(x+y) = \chi(x) + y\frac{\partial\chi(x)}{\partial x} + \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2\chi(u)}{\partial u^2}\ ^{*}),$$

. . . .

wo u eine Gröfse bedeutet, die zwischen x und $x+y$ liegt, die aber in jeder Gleichung einen anderen Werth hat. Setzt man daher $x_{n+1} = \frac{p}{q} + \omega$, so hat man

$$\chi(x_{n+1}) = \chi\left(\frac{p}{q} + \omega\right) = 0,$$

oder

$$\chi\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{\omega\partial\chi(u)}{\partial u} = 0,$$

wo u eine zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p}{q} + \omega$ und daher auch zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p^1}{q^1}$ liegende Zahl bedeutet, also

$$\omega = -\frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right)}{\frac{\partial\chi(u)}{\partial u}}.$$

Da aber sowohl $\frac{\partial\chi\left(\frac{p}{q}\right)}{\partial\left(\frac{p}{q}\right)}$ als auch $\frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}$ positive Gröfsen sind, so mufs auch $\frac{\partial\chi(u)}{\partial u}$ eine solche sein, da ja nach der Voraussetzung zwischen $\frac{p}{q}$

*) *Lagrange Traité des fonct. anal. art.* 53.

und $\frac{p'}{q'}$ keine Wurzel der Gleichung $\frac{\partial \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0$ liegt, und zwar mufs $\frac{\partial \chi(u)}{\partial u}$ gröfser als $\frac{\partial \chi\left(\frac{p}{q}\right)}{\partial \left(\frac{p}{q}\right)}$ und kleiner als $\frac{\partial \chi\left(\frac{p'}{q'}\right)}{\partial \left(\frac{p'}{q'}\right)}$ sein, weil $\frac{\partial \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}}$ zwischen den Grenzen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ immer wachsen mufs, indem nach der Voraussetzung $\frac{\partial^2 \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^2}$ innerhalb dieser Grenzen immer positiv ist; $\chi\left(\frac{p}{q}\right)$ dagegen ist nach der Voraussetzung negativ. Setzt man daher

$$\omega = -\frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right)}{\frac{\partial \chi\left(\frac{p'}{q'}\right)}{\partial \left(\frac{p'}{q'}\right)}},$$

so ist dieser Werth kleiner als der wahre Werth von ω, und man hat daher

$$5. \quad x_{n+1} > \frac{p}{q} - \frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right) . \partial \left(\frac{p'}{q'}\right)}{\partial \chi\left(\frac{p'}{q'}\right)}.$$

Setzt man $x_{n+1} = \frac{p'}{q'} - \omega$, so findet man

$$\chi(x_{n+1}) = \chi\left(\frac{p'}{q'} - \omega_1\right) = \chi\left(\frac{p'}{q'}\right) - \omega_1 \frac{\partial \chi(u)}{\partial u} = 0,$$

wo u wieder eine zwischen $\frac{p'}{q'} - \omega_1$ und $\frac{p'}{q'}$ oder eine zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ liegende Zahl bedeutet, und es ist $\omega_1 = \frac{\chi\left(\frac{p'}{q'}\right)}{\frac{\partial \chi(u)}{\partial u}}$; Zähler und Nenner dieses Bruches sind positive Gröfsen. Setzt man daher

$$\omega_1 = \frac{\chi\left(\frac{p'}{q'}\right) . \partial \left(\frac{p'}{q'}\right)}{\partial \chi\left(\frac{p'}{q'}\right)},$$

so ist dieser Werth kleiner als der wahre Werth von ω_1, und daher

$$6. \quad x_{n+1} < \frac{p'}{q'} - \frac{\chi\left(\frac{p'}{q'}\right) . \partial \left(\frac{p'}{q'}\right)}{\partial \chi\left(\frac{p'}{q'}\right)}.$$

Aus den Formeln (3.) und (5.) folgt

$$\frac{zp+p^0}{zq+q^0} > \frac{p}{q} - \frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right)\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

und hieraus findet man, da $\chi\left(\frac{p}{q}\right)$ negativ ist,

$$7. \quad z < -\frac{q^0}{q} + \frac{p^0 q - p q^0}{q^0} \cdot \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right) \cdot \chi\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Aus den Formeln (4.) und (6.) folgt

$$\frac{z_1 p^1 - p^0}{z_1 q^1 - q^0} < \frac{p^1}{q^1} - \frac{\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right) \cdot \partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

also

$$8. \quad z_1 < \frac{q^0}{q^1} + \frac{p^0 q^1 - p^1 q^0}{q^{1\,2}} \cdot \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right) \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

da aber $a + 1 - \frac{1}{z_1} = a + \frac{1}{z}$ ist, so hat man $z = \frac{1}{1 - \frac{1}{z_1}}$, und daher

$$9. \quad z > \frac{1}{1 - \cfrac{1}{\frac{q^0}{q^1} + \frac{p^0 q^1 - p^1 q^0}{q^{1\,2}} \cdot \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right) \cdot \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}}}.$$

Die Gleichungen (7.) und (9.) geben also zwei Grenzen, zwischen welchen z jedesmal eingeschlossen ist, und wenn man die beiden Werthe in Kettenbrüche (deren Theilzähler sämmtlich $= 1$ sind) verwandelt, so gehören die ersten Theilnenner, die beiden gemeinschaftlich sind, nothwendig dem wahren Werthe von z an. Hierdurch findet man zwei neue Näherungswerthe, zwischen welchen x_n enthalten ist, und mit welchen man wie mit den früheren $\frac{p}{q}$, $\frac{p^1}{q^1}$ verfahren kann, um wieder andere Näherungswerthe zu finden.

Es wurde bisher angenommen, daſs

$$F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots . + 1 : a_{n+r} = \frac{p}{q}$$

ist, ist aber dieser Näherungswerth gröſser, als x_{n+1}, also $= \frac{p^1}{q^1}$, so muſs

man statt der Formeln (7.) und (9.) zwei andere Formeln nehmen, denn man hat alsdann

$$10.\quad x_{n+1} = \frac{z_1 p - p^0}{z_1 q - q^0},$$

$$11.\quad x_{n+1} = \frac{z p^1 - q^0}{z p^1 - q^0}.$$

Verbindet man Formel (10.) und (5.) und Formel (11.) mit (6.), so findet man

$$\frac{z^1 p - p^0}{z^1 q - q^0} > \frac{p}{q} - \frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right)\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

$$\frac{z p^1 + p^0}{z q^1 + q^0} < \frac{p^1}{q^1} - \frac{\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

also

$$12.\quad z_1 < \frac{q^0}{q} + \frac{p^0 q - p q^0}{q^2}\cdot\frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\chi\left(\frac{p}{q}\right)},$$

oder

$$13.\quad z > \frac{1}{1 - \cfrac{1}{\frac{q^0}{q} + \frac{p^0 q - p q^0}{q^2}\cdot\frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\chi\left(\frac{p}{q}\right)}}},$$

und

$$14.\quad z < -\frac{q^0}{q^1} + \frac{p^1 q^0 - p^0 q^1}{q^{1\,2}}\cdot\frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}.$$

96.

Es ist aber nicht nöthig, zur Bestimmung des Werthes von z die Gröfsen $\frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}$, $\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)$, $\chi\left(\frac{p}{q}\right)$ besonders zu berechnen, vielmehr lassen sich die vorhergehenden Formeln so umformen, dafs alle in denselben vorkommenden Gröfsen schon berechnet sind. Betrachten wir zuerst die Formeln (7.), (8.), (9.), so sieht man sogleich, dafs der zweite Theil der Gleichung (8.) mit dem zweiten Theile der Gleichung (2.) in §. 93. über-

einstimmt, wenn man dort p^1, q^1 bezüglich statt p, q, und $-p^0$, $-q^0$ statt p^0, q^0 setzt, und man hat daher

$$15.\quad \frac{q^0}{q}+\frac{p^0q^1-p^1q^0}{q^{1^2}}\cdot\frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}=(1-m)\frac{q^0}{q^1}-\frac{B^1}{B},$$

wo B, B_1 die Coefficienten sind, die bezüglich den Potenzen z_1^m, z_1^{m-1} angehören, in der Gleichung, die man nach gehöriger Reduction erhält, wenn man in $\chi(x_{n+r})=0$ statt x_{n+1} den Werth $\frac{p^1z_1-p^0}{q^1z_1-q^0}$, oder wenn man in der Gleichung $F(x_{n+r})=0$ statt x_{n+r} den Werth $a_{n+r}+1+\frac{1}{-z_1}$ substituirt. Diese Gleichung ist

$$F(a_{n+r}+1)z_1^m-\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)}z_1^{m-1}+\ldots\ldots=0\quad(\S.\ 88.),$$

folglich

$$B=F(a_{n+r}+1),\ B_1=-\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)},$$

und

$$16.\quad z_1<\frac{(1-m)q^0}{q^1}+\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r})+1)F(a_{n+r}+1)}.$$

Die Formel (9.) geht also in folgende über:

$$17.\quad z>\frac{q^1.\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)}-(m-1)q^0.F(a_{n+r}+1)}{q^1\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)}[(m-1)q^0+q^1]F(a_{n+r}+1)}.$$

Da nach der Voraussetzung $\frac{p}{q}$ kleiner als x_{n+1}, und daher $\frac{p^0}{q^0}$ gröfser als x_{n+1} ist, so hat man

$$p^0q-pq^0=+1\quad(\S.\ 16.),$$

dagegen

$$p^0q^1-p^1q^0=-1,\ \text{da}\ \frac{p^1}{q^1}=\frac{p+p^0}{q+q^0}\ \text{ist}.$$

Hiernach folgt aus (15.)

$$18.\quad \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}=\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\left(mq^0+\frac{B_1}{B}q^1\right)q^1.$$

Ferner ist aus Formel (3.) des §. 93. ersichtlich, dafs $\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)=\frac{B}{q^{1^m}}=\frac{F(a_{n+r}+1)}{q^{1^m}}$ ist, und nennt man C den numerischen Werth des Coefficienten der Potenz z^m in der Gleichung, die aus $F(x_{n+r})=0$ entspringt, wenn man $a_{n+r}+\frac{1}{z}$ statt x_{n+r} substituirt, so hat man $\chi\left(\frac{p}{q}\right)=-\frac{C}{q^m}=\frac{F(a_{n-r})}{q^m}$, da

$\chi\left(\frac{p}{q}\right)$ negativ ist. Substituirt man, mit Berücksichtigung dieser Bemerkungen, den Werth (18.) in der Formel (7.), so findet man:

$$19. \quad z < \frac{\left(\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)}q^1 - m q^0 F(a_{n+r}+1)\right)q^{m-1} + q^0 F(a_{n+r}) q^{1^{m-1}}}{-F(a_{n+r})\, q \,.\, q^{1^{m-1}}}.$$

Die Formel (14.) stimmt mit der Formel (2.) des §. 93. zusammen, wenn man dort überall p^1, q^1 statt p, q setzt. Man hat daher

$$z < \frac{(m-1)q^0}{q^1} - \frac{C_1}{C},$$

wo $C = F(a_{n+r})$, $C_1 = \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r})}$ ist, also

$$20. \quad z < \frac{(m-1)q^0 F(a_{n+r}) - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r})}q^1}{F(a_{n+r})q^1}.$$

Da, wenn diese Formel Statt hat, $F(a_{n+1} + \ldots + 1 : a_{n+r})$ gröſser wie x_{n+1} und $= \frac{p^1}{q^1}$ ist, so muſs $\frac{p^0}{q^0}$ kleiner wie x_{n+1} sein, und daher

$$p^1 q^0 - p^0 q^1 = +1,$$

und da $\frac{p}{q} = \frac{p^1 + p^0}{q^1 + q^0}$ ist, so hat man

$$p q^0 - p^0 q = +1.$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)} = \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\left(m q^0 - \frac{C_1}{C}q^1\right)q^1 = \frac{F(a_{n+r})}{q^{1^m}}\left(m q^0 - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r})F(a_{n+r})}q^1\right)q^1,$$

Daher verwandelt sich Formel (12.) in folgende:

$$21. \quad z_1 < \frac{q^0}{q} - \frac{F(a_{n+r})q^{m-2}}{F(a_{n+r}+1)q^{1^{m-1}}}\left(m q^0 - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r})F(a_{n+r})}q^1\right),$$

und aus Formel (13.) wird

$$22. \quad z > \frac{q^0 q^{1^{m-1}} F(a_{n+r}+1) - q^{m-1}F(a_{n+r})\left(m q^0 - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r})F(a_{n+r})}q^1\right)}{(q^0 - q)q^{1^{m-1}} F(a_{n+r}+1) - q^{m-1}F(a_{n+r})\left(m q^0 - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r})F(a_{n+r})}q^1\right)}.$$

Faſst man das Vorhergehende zusammen, so findet man folgende practische Regel. Ist eine Gleichung $f(x) = 0$ gegeben, die eine reelle, zwischen a und $a+1$ liegende Wurzel hat, so leitet man aus dieser Gleichung, nach früher gegebenen Regeln, andere Gleichungen ab zur Bestimmung der Theilnenner a_1, a_2 u. s. w., bis man an eine Gleichung $\chi(x_{n+1}) = 0$ kommt,

deren einzige reelle Wurzel zwischen den ganzen Zahlen a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ liegt. Diese Gleichung betrachte man alsdann als die ursprünglich gegebene, und leite aus ihr andere ab, bis man an eine Gleichung $F(x_{n+r})=0$ kommt, deren einzige reelle Wurzel zwischen a_{n+r} und $a_{n+r}+1$ liegt, und die so beschaffen ist, dafs $[a_{n+r}]$ und $[a_{n+r}+1]$ nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sind. Man berechne alsdann die Gröfse

$$F(a_{n+2},\, a_{n+r-1}) = F(a_{n+2}+1:a_{n+3}+\ldots.+1:a_{n+r-1}) = q^0,$$

und die Gröfse

$$F(a_{n+2};\, a_{n+r}) = F(a_{n+2}+1:a_{n+3}+\ldots.+1:a_{n+r}),$$

welche $=q$ oder $=q^1$ ist. Je nachdem r eine ungerade oder gerade Zahl ist, und je nachdem das Eine oder das Andere der Fall ist, hat man $q^1 = q^0+q$ oder $q=q^0+q^1$; die Gröfsen $F(a_{n+r})$ und $\frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial (a_{n+r})}$ müssen ohnehin zur Bestimmung der Zeichenreihe, oder zur Bestimmung der auf $F(x_{n+r})=0$ folgenden Gleichung berechnet sein. Berechnet man alsdann noch, je nachdem $F(a_{n+2},a_{n+r})=q^1$ oder $=q$ ist, entweder blos $F(a_{n+r}+1)$, oder die beiden Gröfsen $F(a_{n+r}+1)$ und $\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial (a_{n+r}+1)}$, so hat man alle Stücke, die zur Bestimmung der Grenzen von z dienen. Hat man, vermöge dieser Grenzen, die neuen Theilnenner $a_{n+r+1}, a_{n+r+2}\ldots. a_{n+r+t}$ gefunden, so bildet man die Gleichung $\varphi(a_{n+r+t})=0$, und verfährt mit dieser wie mit der Gleichung $F(a_{n+r})=0$, um neue Theilnenner zu finden.

Es kann zuweilen sein, dafs man an eine Gleichung $F(x_{n+r})=0$ gekommen ist, und dennoch aus den gezogenen Grenzen für die erforderliche genauere Bestimmung des Werthes von z kein Resultat gewinnt, indem diese Grenzen so weit auseinander liegen, dafs sie gar keinen gemeinschaftlichen Theilnenner haben. In diesem Falle sucht man mit Hülfe des Theorems (*A.*) einen oder einige der auf a_{n+r} folgenden Theilnenner, und so kommt man bald an eine Gleichung, von welcher an die Grenzen von z immer mehr Theilnenner mit Sicherheit angeben, da diese Grenzen immer näher zusammenrücken *).

97.

Es sei z. B. die Gleichung $f(x)=x^3-x^2-2x+1=0$ gegeben, deren Wurzeln bekanntlich $2\cos\frac{\pi}{7}$, $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{3\pi}{7}$ sind; der Werth der

*) Eine genauere Bestimmung der Convergenz der Annäherung kann leicht aus *Analyse des équat. liv.* 2. *art.* 9. abgeleitet werden.

ersten Wurzel wird durch Hülfe der Kettenbrüche auf folgende Weise gefunden. Es ist

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 - 2x - 2,$$
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 6x - 2,$$
$$\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 6,$$

also

$$[1] = \underset{6}{+}\ \underset{4}{+}\ \underset{1}{-}\ \underset{1}{-}$$
$$[2] = \underset{6}{+}\ \underset{10}{+}\ \underset{6}{+}\ \underset{1}{+}.$$

Hier entspricht also die Gleichung $f(x)=0$ der Gleichung $\chi(x_{n+1})=0$, und man hat

$$x > \tfrac{1}{1},\ < \tfrac{2}{1}.$$

Entwickelt man die folgende Gleichung, so hat man:

$$f_1(x_1) = x_1^3 + x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_1 - 2,$$
$$\frac{\partial^2 f_1(x_1)}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 2,$$
$$\frac{\partial^3 f_1(x_1)}{\partial x_1^3} = 6,$$

und

$$[1] = \underset{6}{+}\ \underset{8}{+}\ \underset{3}{+}\ \underset{1}{-}$$
$$[2] = \underset{6}{+}\ \underset{14}{+}\ \underset{14}{+}\ \underset{7}{+},$$

also

$$x_1 > \tfrac{1}{1},\ < \tfrac{2}{1} \text{ und } x > 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2},$$
$$< 1 + \tfrac{1}{1} = 2.$$

Die Gleichung $f_1(x_1)=0$ entspricht der Gleichung $F(x_{n+r})=0$; hier ist also

$$a_{n+r} = 1 \text{ und } \frac{p^0}{q^0} = \frac{1}{1},\ \frac{p}{q} = \frac{3}{2},\ \frac{p^1}{q^1} = \frac{2}{1}.$$

Man mufs daher zur Bestimmung der Grenzen von z die Formeln (20.) und (22.) anwenden, also

$$z < \frac{2.1.-1-3.1}{-1.1} = 5,$$

$$z > \frac{1.1.7-4.-1\left(3.1-\frac{3}{-1}.1\right)}{1.1.7-4.-1\left(3.1-\frac{3}{-1}.1\right)-2.1.7} = \frac{31}{17} = 1+.$$

Da die beiden Grenzen keinen gemeinschaftlichen Theilnenner haben, so entwickele man die folgende Gleichung

$$f_2(x_2) = x_2^3 - 3x_2^2 - 4x_2 - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2} = 3x_2^2 - 6x_2 - 4,$$
$$\frac{\partial^2 f_2(x_2)}{\partial x_2^2} = 6x_2 - 6,$$
$$\frac{\partial^3 f_2(x_2)}{\partial x_2^3} = 6,$$

$$[4] = \begin{array}{cccc} + & + & + & - \\ 6 & 18 & 20 & 1 \end{array}$$

$$[5] = \begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ 6 & 24 & 41 & 29. \end{array}$$

Hier ist

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{2}{1},\ \frac{p}{q} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}} = \frac{9}{5},\ \frac{p'}{q'} = \frac{11}{6},$$

daher mufs man zur Bestimmung der Grenzen von z die Formeln (17.) und (19.) anwenden; man findet

$$z > \frac{6.41 - 2.1.29}{6.41 - 8.29} = 13+,$$
$$z < \frac{(41.6 - 3.1.29)5^2 + 1. - 1.6^2}{5.6^2} = 21+.$$

Da auch diese Grenzen noch nicht enge genug sind, so bilde man die Gleichung:

$$f_3(x_3) = x_3^3 - 20x_3^2 - 9x_3 - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial f_3(x_3)}{\partial x_3} = 3x_3^2 - 40x_3 - 9,$$
$$\frac{\partial^2 f_3(x_3)}{\partial x_3^2} = 6x_3 - 40,$$
$$\frac{\partial^3 f_3(x_3)}{\partial x_3^3} = 6,$$

und

$$[20] = \begin{array}{cccc} + & + & + & - \\ 6 & 80 & 391 & 181 \end{array}$$

$$[21] = \begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ 6 & 86 & 473 & 251. \end{array}$$

Hier ist

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{9}{5},\ \frac{p'}{q'} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20}}} = \frac{182}{101},\ \frac{p}{q} = \frac{191}{106}.$$

Zur Bestimmung der Grenzen von z müssen die Formeln (20.) und (22.)

angewandt werden, und man findet:

$$z < \frac{41301}{18281} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{48 +}}}}$$

$$z > \frac{487028871}{215621065} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 +}}}};$$

hierdurch sind also vier neue Theilnenner, 2, 3, 1, 6, gewonnen.

Die entsprechenden Näherungswerthe sind $\frac{373}{207}$, $\frac{1301}{722}$, $\frac{1674}{929}$, $\frac{11345}{6296}$. Die dem Theilnenner 6 entsprechende Gleichung ist:

$$f_7(x_7) = 559x_7^3 - 2540x_7^2 - 4961x_7 - 2039 = 0,$$

$$\frac{\partial f_7(x_7)}{\partial x_7} = 1677x_7^2 - 5080x_7 - 4961,$$

$$\frac{\partial^2 f_7(x_7)}{\partial x_7^2} = 3354x_7 - 5080,$$

$$\frac{\partial^3 f_7(x_7)}{\partial x_7^3} = 3354,$$

$$[6] = \begin{matrix} + & + & + & - \\ 3354 & 15044 & 24931 & 2521 \end{matrix}$$

$$[7] = \begin{matrix} + & + & + & + \\ 3354 & 18398 & 41652 & 30491 \end{matrix}$$

und

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{1674}{929}, \quad \frac{p}{q} = \frac{13019}{7225}, \quad \frac{p^1}{q^1} = \frac{11345}{6296}.$$

Die Formeln (20.) und (22.) geben

$$z < \frac{161649594}{15872216} = 10 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{19 +}}}}}}}}$$

$$z > \frac{96833014444074499}{9507941256692399} = 10 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 +}}}}}}}}$$

Hierdurch sind 8 neue Theilnenner, 10, 5, 2, 2, 1, 2, 2, 1, gewonnen. Entwickelt man die entsprechenden Näherungswerthe, so findet man, daſs dem letzten Theilnenner 1 der Bruch $\frac{40674108}{22572427}$ entspricht, dem vorhergehenden Theilnenner 2 entspricht der Bruch $\frac{28600781}{15872236}$; der Unterschied zwischen dem wahren Werthe der Wurzel und dem Näherungswerthe $\frac{40674108}{22572427}$ ist daher kleiner als $\frac{1}{(22572427)^2}$, oder auch kleiner als

$$\frac{1}{2.28600781.40674108}\ (\S.\ 15.).$$

Würde man die dem letzten Theilnenner 1 entsprechende Gleichung ableiten, so könnte man daraus wieder eine Menge neuer Theilnenner finden, und so dem Werthe der Wurzel noch viel näher kommen.

98.

Faſst man das in diesem Kapitel Gesagte zusammen, so findet man:

1) daſs die Methode der Entwickelung der Wurzeln durch Kettenbrüche keinesweges die Berechnung des kleinsten Unterschiedes der Wurzeln erheischt,
2) daſs diese Methode kein wesentliches Element der Analysis ist, sondern vielmehr unendlich viele Methoden möglich sind, vermittelst welcher man sich dem Werthe der Wurzeln nähern kann,
3) daſs diese Methoden alle genau sind, d. h. zwei Werthe geben, zwischen welchen die Wurzel jedesmal enthalten ist,
4) daſs alle Methoden zugleich auf die Entdeckung der imaginairen Wurzeln führen, sobald man das Theorem (*A.*) zu Hülfe ruft.

B. Anwendung der recurrirenden Reihen zur Auflösung der Gleichungen.

99.

Die Auflösung der Gleichungen vermittelst der Kettenbrüche, und die unendlich vielen anderen möglichen Auflösungsarten, von welchen die Rede war, beruhen alle auf der Anwendung des Theorems (*A.*), d. h. sie fordern, daſs man die Natur und die Grenzen der Wurzeln schon zum Voraus bestimmt habe, ehe man zur nähernden Berechnung der Wurzeln schreitet. Es wird daher nicht unpassend sein, zu zeigen, daſs man eine andere Methode, oder eigentlich viele andere Methoden, zur Auflösung der Gleichungen anwenden kann, die, ohne sich auf die Anwendung des Theorems (*A.*) zu gründen, dennoch die Natur und die Werthe der (reellen)

Wurzeln, so genau, als man es wünscht, angeben. Die Behandlung dieser Methoden bietet ein reiches Feld von Untersuchungen dar; ich muſs mich darauf beschränken, hier nur eine derselben in der Kürze zu behandeln. Ehe ich aber diese Methode erläutere, ist es nöthig, eine Übersicht der frühern Leistungen zu geben, aus welchen sie erwachsen ist. Bekanntlich hat D. Bernoulli zuerst gezeigt *), wie man sich der recurrirenden Reihen zur Auffindung der Wurzeln bedienen kann, indem er nachwies, wie gewisse Functionen der Wurzeln mit den Coefficienten der Gleichung durch eine recurrirende Reihe zusammenhängen. Euler **), der Bernoulli's Ansicht mit aller ihm eigenen Klarheit ausführte, zeigte auch zugleich die Mangelhaftigkeit und beschränkte Anwendung dieses Verfahrens. Man kann nemlich auf directem Wege durch dasselbe nur die gröſste und kleinste Wurzel finden, und zwar nur in dem Falle, wenn sie reell sind. Die Gröſse der Wurzeln wird hier auf folgende Weise bestimmt: Man erhebt jede Wurzel zum Quadrat, und ordnet diese Quadrate nach ihrer Gröſse; dem gröſseren Quadrat entspricht alsdann die gröſsere Wurzel, und so kann man die Wurzeln nach ihrer Gröſse ordnen. Befinden sich unter den Wurzeln auch imaginäre, so wird die Gröſse der letzteren auf folgende Weise bestimmt: Man multiplicirt jedes Paar zusammengehörender imaginärer Wurzeln mit einander, dieses Product ist immer reell; man vergleicht es mit den Quadraten der reellen Wurzeln; von dem Range, welchen es unter diesen einnimmt, hängt alsdann der Rang ab, welchen die zwei zusammengehörenden imaginären Wurzeln in der Reihe der nach ihrer Gröſse geordneten Wurzeln einnehmen. Sobald die gröſsten Wurzeln ein Paar imaginäre sind, so führt Bernoulli's Methode zu keinem Resultate. Lagrange ***), der diese Methode mit einigen vortrefflichen Bemerkungen bereichert hat, hat jedoch für ihre weitere Ausbildung nichts Wesentliches gethan. Auch Legendre †) hat zu dem Bekannten nichts hinzugefügt, als die Bemerkung, daſs man durch Umbildung der Gleichungen leicht bewirken kann, daſs irgend eine der Wurzeln die gröſste werde, so daſs die Bernoullische Methode zur Berechnung der Werthe aller Wurzeln angewandt werden könnte. Aber diese

---

*) *Comment. acad. Petr. T.* 3.
**) *Introd. in anal. infin. cap.* 17.
***) *Résol. des équat. num. note* 6.
†) *Théor. des nombres art.* 113.

Umbildung führt nothwendig zu weitläufigen Rechnungen, und die Schwierigkeit wegen der imaginären Wurzeln bleibt unerledigt. Der Erste, welchem man eine wahrhafte Fortbildung der Bernoullischen Methode verdankt, ist Fourier. Ein Abschnitt des zweiten, leider nicht erschienenen Theils seines Werkes: „*Analyse des équations*" sollte eine ausführliche Behandlung dieser Methode enthalten; für jetzt ist nur Das bekannt, was er darüber in dem *Exposé sinoptique* *) mitgetheilt hat. Nach diesem sind die Hauptresultate folgende: Nennt man die Wurzeln, nach ihrer Gröfse geordnet, s, t, u, v, u. s. w., und nimmt zuerst an, dafs alle Wurzeln reell sind, so kann man aus der gegebenen Gleichung recurrirende Reihen bilden, durch welche man, so nahe, als es verlangt wird, die Werthe von s, $s.t$, $s.t.u$ u. s. w., und daher auch die Werthe jeder einzelnen Wurzel, finden kann. Ist aber die gröfste Wurzel imaginär, d. h. nehmen zwei zusammengehörende imaginäre Wurzeln den ersten Rang ein, so giebt die erste Reihe, welche den Werth von s angeben soll, gar kein Resultat; dagegen wird die zweite Reihe allerdings den Werth von $s.t$ angeben. Ist die dritte Wurzel u reell, so erhält man durch eine dritte Reihe das Product $s.t.u$; ist u imaginär, so giebt diese Reihe kein Resultat; dagegen erhält man durch eine vierte Reihe den Werth des Products $s.t.u.v$ u. s. w.; es kann aber nie vorkommen, dafs zwei auf einander folgende Reihen kein Resultat geben. Hierdurch wird also nicht blos der Werth aller reellen Wurzeln gefunden, sondern auch das Vorhandensein der imaginären Wurzeln entdeckt. Um aber den Werth der letztern zu finden, bildet man andere Reihen, welche nicht, wie die ersten, Näherungswerthe der Producte, sondern vielmehr der Summen der Wurzeln geben. Und indem man so Summe und Product je zweier imaginärer Wurzeln erfährt, findet man daraus die Werthe dieser Wurzeln. Fourier hat den Beweis keines einzigen der hierher gehörenden Sätze mitgetheilt, auch nicht einmal angegeben, auf welche Weise die erforderlichen Reihen gebildet werden, zwei ausgenommen, nemlich diejenigen, die zur Bestimmung von $s+t$ und st dienen; aber auch von diesen ist die eine unrichtig angegeben **).

*) *pag.* 68 ff. Fourier hat im Jahre 1822 eine Abhandlung über denselben Gegenstand der Akademie der Wissenschaften überreicht; es ist zu hoffen, dafs sie im Druck erscheint.

**) Vergl. Journ. für die Math. Bd. pag.

Auf den Zusammenhang zwischen den Coefficienten und gewissen Functionen der Wurzeln beruht auch eine andere Auflösungsmethode, die Lagrange*) angegeben hat; aber indem er fordert, dafs man die höheren Gleichungen auf niedrigere zurückführt, so wird eben dadurch, wie er selbst sagt, die Methode, wegen der vielen weitläufigen Operationen, die sie fordert, unausführbar.

Die hier folgende Methode ist, was die leitende Idee und die einzelnen Resultate betrifft, mit der Fourierschen durchaus identisch; die Art, wie die einzelnen Reihen gebildet werden, ist bestimmt verschieden, wie man schon daraus sehen kann, wenn man die Reihen, die das Product und die Summe der zwei ersten Wurzeln geben, mit denjenigen, die Fourier gegeben hat, vergleicht. Ich glaube behaupten zu können, dafs Fourier's Verfahren viel bequemer in der Ausübung ist, dafs dagegen das hier angegebene viel näher liegt, weswegen es auch gewählt worden ist.

100.

Ich mufs zuerst einige bekannte Lehrsätze anführen. Es sei die gegebene Gleichung

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_m = 0,$$

wo A_1, A_2 u. s. w. ganze Zahlen sind. Zur gröfseren Einfachheit wird vorausgesetzt, dafs die Gleichung keine gleichen Wurzeln hat. Es seien

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots \alpha_m$$

die m Wurzeln dieser Gleichung, nach ihrer Gröfse (diesen Ausdruck in der früher erwähnten Bedeutung genommen) geordnet. Ferner sei

$$\Sigma\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_m$$
$$\Sigma\alpha_1^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2,$$

und allgemein bedeute $\Sigma\alpha_1^n$ die Summe der $n$ten Potenzen aller Wurzeln, so ist bekanntlich

$$1)\quad \Sigma\alpha_1 = -A_1,$$
$$2)\quad \Sigma\alpha_1^2 = -A_1\Sigma\alpha_1 - 2A_2,$$
$$3)\quad \Sigma\alpha_1^3 = -A_1\Sigma\alpha_1^2 - A_2\Sigma\alpha_1 - 3A_3,$$
$$4)\quad \Sigma\alpha_1^4 = -A_1\Sigma\alpha_1^3 - A_2\Sigma\alpha_1^2 - A_3\Sigma\alpha_1 - 4A_4,$$

so dafs man vermittelst einer recurrirenden Reihe, aus den Coefficienten A_1, A_2, A_3 u. s. w., die Summen aller Potenzen der Wurzeln finden kann. Je gröfser die Potenz n ist, auf welche man die Wurzeln erhebt, desto mehr wird auch α_1^n im Vergleich mit der Summe der Potenzen $\alpha_2^n + \alpha_3^n + \ldots + \alpha_m^n$

*) *Résol. des équat. note* 10.

betragen, wenn α_1 reell ist, man wird zuletzt an eine Potenz n kommen, die so beschaffen ist, dafs man, ohne merklichen Fehler zu begehen,

$$\Sigma\alpha_1^n = \alpha_1^n,$$
$$\Sigma\alpha_1^{n+1} = \alpha_1^{n+1}$$

setzen kann, woraus alsdann $\alpha_1 = \frac{\Sigma\alpha_1^{n+1}}{\Sigma\alpha_1^n}$ folgt. Bildet man eine recurrirende Reihe, deren Glieder $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1^2$, $\Sigma\alpha_1^3$ u. s. w. sind, und dividirt jedes Glied durch das vorhergehende, so erhält man den Werth von α_1 desto genauer, je weiter man die Reihe entwickelt; die Quotienten werden immer mehr und mehr gegen die Wurzel α_1 convergiren, man sagt daher, die Reihe sei convergent; sie soll in der Folge die Reihe (C) heifsen. Dies ist die bekannte Bernoullische Regel. Man sieht, dafs sie nur in dem Fall anwendbar ist, wenn α_1 reell ist; ist dagegen diese Wurzel imaginair, so kann natürlich α_1^n oder α_1^{n+1} nicht hinsichtlich der Gröfse mit der Summe der übrigen Potenzen verglichen werden: daher wird auch die Reihe (C) in diesem Falle kein Resultat geben, sondern divergiren.

Bildet man aus den Wurzeln alle Combinationen, ohne Wiederholung, zu zwei Elementen, und bezeichnet die Summe derselben durch $\Sigma\alpha_1\alpha_2$; eben so die Combinationen ohne Wiederholung zu drei Elementen, und bezeichnet die Summe derselben durch $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ u. s. w., so hat man bekanntlich

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2 = A_2, \quad \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -A_3, \quad \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = A_4 \text{ u. s. w.}$$

Aber aus (1.) und (2.) folgt

$$5. \quad 2\Sigma\alpha_1\alpha_2 = 2A_2 = (\Sigma\alpha_1)^2 - \Sigma\alpha_1^2.$$

Substituirt man in dieser Formel statt $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die $n$ten Potenzen $\alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots$, so hat man:

$$6. \quad 2\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n = (\Sigma\alpha_1^n)^2 - \Sigma\alpha_1^{2n}.$$

Je gröfser n ist, desto weniger wird die Summe der übrigen in $\Sigma\alpha_1^n\alpha_2^n$ enthaltenen Glieder gegen das erste $\alpha_1^n.\alpha_2^n$ betragen, und zwar sowohl, wenn α_1, α_2 beide reell, als auch, wenn beide imaginair sind, da auch im letzteren Falle das Product $\alpha_1\alpha_2$ reell, und gröfser als das Quadrat jeder reellen Wurzel, und um so mehr, als das Product zweier dieser Wurzeln ist. Ist daher n sehr grofs, so kann man ohne merklichen Fehler

$$2\alpha_1^n\alpha_2^n = 2\Sigma\alpha_1^n\alpha_2^n = (\Sigma\alpha_1^n)^2 - \Sigma\alpha_1^{2n},$$
$$2\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n+1} = 2\Sigma\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n+1} = (\Sigma\alpha_1^{n+1})^2 - \Sigma\alpha_1^{2n+2}$$

setzen, folglich

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{(\Sigma\alpha_1^{n+1})^2 - \Sigma\alpha_1^{2n+2}}{(\Sigma\alpha_1^n)^2 - \Sigma\alpha_1^{2n}}.$$

Hieraus erhält man folgende Regel:

Man bilde aus den Gliedern der Reihe (C) die neue Reihe

$$(C_1) = (\Sigma\alpha_1)^2 - \Sigma\alpha_1^2,\ (\Sigma\alpha_1^2)^2 - \Sigma\alpha_1^4,\ (\Sigma\alpha_1^3)^2 - \Sigma\alpha_1^6 \text{ u. s. w.},$$

und dividire jedes Glied dieser neuen Reihe durch das vorhergehende, so werden die Quotienten gegen die Grenze $\alpha_1.\alpha_2$ convergiren; kennt man daher den Werth von α_1 durch die Reihe (C), so findet man aus (C) den Werth von α_2. Dies gilt jedoch nur für den Fall, wenn α_1 und α_2 beide reell oder beide imaginair sind. Ist aber α_1 reell, α_2 imaginair, so ist (C) zwar convergent, aber (C_1) divergent.

Aus (1.), (2.), (3.) folgt:

$$7.\quad 2.3\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -2.3\,A_3 = (\Sigma\alpha_1)^3 - 3\,\Sigma\alpha_1.\Sigma\alpha_1^2 + 2\,\Sigma\alpha_1^3.$$

Substituirt man wieder statt α_1, α_2, α_3 .... die $n$ten Potenzen dieser Wurzeln, so hat man

$$8.\quad 2.3\,\Sigma\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n = (\Sigma\alpha_1^n)^3 - 3\,\Sigma\alpha_1^n\,\Sigma\alpha_1^{2n} + 2\,\Sigma\alpha_1^{3n},$$

und man kann daher wieder, wenn n grofs genug ist,

$$\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n = (\Sigma\alpha_1^n)^3 - 3\,\Sigma\alpha_1^n\,\Sigma\alpha_1^{2n} + 2\,\Sigma\alpha_1^{3n},$$
$$\alpha_1^{n+1}.\alpha_2^{n+1}.\alpha_3^{n+1} = (\Sigma\alpha_1^{n+1})^3 - 3\,\Sigma\alpha_1^{n+1}.\Sigma\alpha_1^{2n+2} + 2\,\Sigma\alpha_1^{3n+3}$$

setzen. Um also den Werth von $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ zu erfahren, bildet man aus den Gliedern der Reihe (C) eine neue Reihe

$$(C_2) = (\Sigma\alpha_1)^3 - 3\,\Sigma\alpha_1.\Sigma\alpha_1^2 + 2\,\Sigma\alpha_1^3,\ (\Sigma\alpha_1^2)^3 - 3\,\Sigma\alpha_1^2.\Sigma\alpha_1^4 + 2\,\Sigma\alpha_1^6,$$
$$(\Sigma\alpha_1^3)^3 - 3\,\Sigma\alpha_1^3.\Sigma\alpha_1^6 + 2\,\Sigma\alpha_1^9 \text{ etc.},$$

und dividirt jedes Glied durch das vorhergehende. Da man nun den Werth von $\alpha_1.\alpha_2$ schon aus der Reihe (C_1) erfahren hat, so erfährt man hieraus den Werth von α_3. Nur in dem Falle, wenn α_3 die erste eines Paares imaginairer Wurzeln ist, convergirt die Reihe (C_1), während (C_2) divergirt.

Aus (1.), (2.), (3.), (4.) ergiebt sich:

$$9.\quad 2.3.4\,\Sigma\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4 = 2.3.4\,A_4$$
$$= (\Sigma\alpha_1)^4 - 6(\Sigma\alpha_1)^2\Sigma\alpha_1^2 + 8\,\Sigma\alpha_1.\Sigma\alpha_1^3 - 6\,\Sigma_1^4 + 3(\Sigma\alpha_1^2)^2,$$
$$10.\quad 2.3.4.\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$$
$$= (\Sigma\alpha_1^n)^4 - 6(\Sigma\alpha_1^n)^2.\Sigma\alpha_1^{2n} + 8\,\Sigma\alpha_1^n.\Sigma\alpha_1^{3n} - 6\,\Sigma\alpha_1^{4n} + 3(\Sigma\alpha_1^{2n})^2;$$

ist n sehr grofs, so kann man statt $\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$ auch blofs $\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$ setzen; bildet man daher eine Reihe (C_3), deren allgemeines Glied

$$(\Sigma\alpha_1^n)^4 - 6\,\Sigma(\alpha_1^n)^2.\Sigma\alpha_1^{2n} + 8\,\Sigma\alpha_1^n.\Sigma\alpha_1^{3n} - 6\,\Sigma\alpha_1^{4n} + 3(\Sigma\alpha_1^{2n})^2$$

ist, und dividirt jedes Glied durch das vorhergehende, so convergiren die Quotienten gegen den Werth $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$. Nur in dem Falle, wenn α_4

die erste zweier imaginairer Wurzeln ist, wird (C_3) divergiren. Die bisher entwickelten Sätze sind einzelne Fälle des folgenden allgemeinen. Man findet den Werth von $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3\ldots.\alpha_r$ auf folgende Weise. Es ist *),

$$11.\quad 2.3.4\ldots.r\,\Sigma\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3\ldots.\alpha_r$$
$$=(\Sigma\alpha_1)^r-\frac{r.r-1}{2}(\Sigma\alpha_1)^{r-2}.\,\Sigma\alpha_1^2+\frac{r.r-1.r-2}{3}(\Sigma\alpha_1)^{r-3}.\Sigma\alpha_1^3$$
$$-\frac{r.r-1.r-2.r-3}{4}(\Sigma\alpha_1)^{r-4}.\,\Sigma\alpha_1^4+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{r.r-1.r-2.r-3}{2.4}(\Sigma\alpha_1)^{r-4}.(\Sigma\alpha_1^2)^2-\ldots.$$

Setzt man in (11.) statt α überall α^n, so erhält man eine neue Formel, welche den Werth von $\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n\ldots.\alpha_r^n$ in Functionen von $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1^2$ u. s. w. ausgedrückt angiebt; ist n grofs genug, so kann man, statt $\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n\ldots.\alpha_r^n$, blofs $\alpha_1^n.\alpha_2^n\ldots.\alpha_r^n$ setzen, und daher aus den Gliedern der Reihe (C) eine andere Reihe (C_{r-1}) ableiten, die so beschaffen ist, dafs der Quotient je zweier auf einander folgender Glieder gegen den Werth $\alpha_1.\alpha_2\ldots.\alpha_r$ convergirt, und diesem Werthe desto näher kommt, je weiter man in der Entwickelung fortgeht. Dies gilt jedoch nur für den Fall, wenn $\alpha_1.\alpha_2\ldots.\alpha_r$ reell ist; ist aber $\alpha_1.\alpha_2\ldots.\alpha_r$ imaginair, so ist die Behauptung, dafs die übrigen in $\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n\ldots.\alpha_r^n$ enthaltenen Glieder gegen das erste verschwinden, nicht ferner anwendbar: die Reihe (C_{r-1}) wird divergiren. Dagegen wird aber $\alpha_1.\alpha_2\ldots.\alpha_r.\alpha_{r+1}$ ein reeller Ausdruck sein, und daher werden auch alle übrigen in $\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n\ldots\alpha_r^n.\alpha_{r+1}^n$ enthaltenen Glieder gegen das erste $\alpha_1^n.\alpha_2^n\ldots\alpha_r^n.\alpha_{r+1}^n$ verschwinden, wenn n grofs genug genommen wird; folglich wird auch eine Reihe (C_r) gebildet werden können, so dafs die Quotienten je zweier ihrer auf einander folgenden Glieder gegen $\alpha_1.\alpha_2\ldots.\alpha_{r+1}$ convergiren.

Man hat also nun folgendes Resultat gewonnen. Sind alle Wurzeln reell, so kann man aus der Reihe (C) andere Reihen ableiten, die die Werthe von $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ u. s. w. angeben, wodurch also die Werthe der einzelnen Wurzeln gefunden werden. Sind aber unter den Wurzeln imaginaire, so werden die Reihen, die einem Producte $\alpha_1.\alpha_2\ldots.\alpha_r$ entsprechen, dessen letzter Factor α_r imaginair ist, divergiren, dagegen aber wird die folgende Reihe, die dem Producte $\alpha_1.\alpha_2\ldots.\alpha_{r+1}$ entspricht, convergiren; niemals aber kann es unter diesen Umständen vorkommen, dafs zwei auf einander folgende Reihen divergiren. Sobald man also

*) Waring *meditat algebr. pg.* 13.

sieht, daſs von zwei auf einander folgenden Reihen eine divergent, die andere convergent ist, so weiſs man, daſs die Gleichung zwei imaginaire Wurzeln hat.

Hieraus folgt, daſs diese Methode, so weit sie bisher entwickelt ist, schon die Werthe aller reellen Wurzeln angiebt, und zugleich die imaginairen Wurzeln mit Leichtigkeit entdecken lehrt. Sie leistet also mehr als die Lagrangesche Methode, und eben so viel als die Methoden, die sich auf das Thorem (A) gründen. Um dies zuerst durch einige Beispiele zu erläutern, soll die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

aufgelöst werden. Hier hat man

$$(C) = \overset{1}{0},\ \overset{2}{14},\ -\overset{3}{21},\ \overset{4}{98},\ -\overset{5}{245},\ \overset{6}{833},\ -\overset{7}{2401},\ \overset{8}{7546},\ -\overset{9}{22638},\ \overset{10}{69629},$$
$$-\overset{11}{211288},\ \overset{12}{645869}\ \ldots.,$$

wo die Zeiger 1, 2, 3.... andeuten, daſs die darunter stehenden Zahlen den Gröſsen $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1^2$, $\Sigma\alpha_1^3$.... entsprechen. Die Quotienten der Reihe (C) convergiren, und man hat daher näherungsweise

$$\alpha_1 = \frac{645869}{-211288} = -3,056\ldots.$$

Ferner ist

$$(C_1) = -14,\ 98,\ -402,\ 2058,\ -9604,\ 48020\ldots.$$

also

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{48020}{-9604} = -5,$$

und

$$\alpha_2 = \frac{-5}{-3,056} = 1,636\ldots.;$$

ferner ist

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -7,$$

also

$$\alpha_3 = \frac{-7}{-5} = 1,4.$$

Die Gleichung hat also drei reelle Wurzeln, wovon eine zwischen -3 und -4, zwei zwischen 1 und 2 liegen. Diese Resultate stimmen mit den in §. 89. gefundenen zusammen.

Sei ferner die Gleichung

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

gegeben. Hier ist

$$(C) = -\overset{1}{1},\ -\overset{2}{1},\ \overset{3}{8},\ -\overset{4}{17},\ \overset{5}{14},\ \overset{6}{20},\ -\overset{7}{85},\ \overset{8}{135},\ -\overset{9}{55},\ -\overset{10}{276},\ \overset{11}{791},$$
$$-\overset{12}{980},\ -\overset{13}{118},\ \overset{14}{3177},\ -\overset{15}{6877},\ \overset{16}{6215},\ \overset{17}{6272},\ -\overset{18}{32713},\ \overset{19}{55802},\ -\overset{20}{29852}$$

$-\overset{21}{97705},\ \overset{22}{310859},\ -\overset{23}{417175},\ \overset{24}{26412},\ \overset{25}{1178039},\ -\overset{26}{2758224},\ \overset{27}{2778218},$
$\overset{28}{1866085},\ -\overset{29}{12490417},\ \overset{30}{22875255},\ -\overset{31}{14967328},\ -\overset{32}{33842713},\ \overset{33}{121407470},$
$-\overset{34}{175740340},\ \overset{35}{394573355},\ \overset{36}{431816023},\ -\overset{37}{1099411711},\ \overset{38}{1219398548},\ \overset{39}{488990159},$
$-\overset{40}{4731386820},\ \overset{41}{9311833202},\ -\overset{42}{7140674871},\ -\overset{43}{11392513741},\ \overset{44}{47108618815},$
$-\overset{45}{73352508040},\ \overset{46}{27052044687},\ \overset{47}{156162053594},\ -\overset{48}{435528865732},$
$\overset{49}{527284536407},\ \overset{50}{93111839099},\ -\overset{51}{1776726169471},\ \overset{52}{3765403188244},$
$-\overset{53}{3292551279121},\ -\overset{54}{3685243389856},\ \overset{55}{18155165223506},\ -\overset{56}{30362556937851}\ldots$

Diese Reihe divergirt. Ferner hat man

$$(C_1) = 2,\ 18,\ 44,\ 154,\ 472,\ 1380,\ 4048,\ 12010,\ 35738,\ 106028,\ \ldots\ 3842396445932,\ 11403238645380,\ 33844830165076,\ \ldots$$

Diese Reihe convergirt, die Gleichung hat also zwei imaginaire Wurzeln, und es ist deren Product näherungsweise

$$\alpha_1 . \alpha_2 = \frac{33844830165076}{11403238645380} = 2{,}968001\ \ldots$$

Man entwickele nun die dritte Reihe

$$(C_2) = 12,\ -12,\ -78,\ 12,\ -816,\ 1374,\ 600\ \ldots$$

Diese Reihe divergirt. Die vierte Reihe dagegen ist

$$(C_3) = 48,\ 0,\ -24,\ 96,\ 408,\ 648,\ 552,\ 288,\ 624,\ 2280,\ 4800,\ 6504,\ 6600,\ 7896\ \ldots$$

Diese Reihe convergirt, die Gleichung hat also noch zwei imaginaire Wurzeln, und es ist das Product der vier ersten Wurzeln

$$\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \alpha_4 = \frac{7896}{6600} = 1{,}196;$$

die letzte Wurzel α_5 ist reell, und zwar ist

$$\alpha_5 = \frac{1{,}000}{1{,}196} = 0{,}8528.$$

Die Gleichung hat also nur eine reelle Wurzel, die zwischen 0 und 1 liegt, wie schon (§. 92.) gefunden wurde.

101.

Es ist noch übrig, zu zeigen, wie man die **Werthe** der imaginairen Wurzeln finden kann. Die Behandlung dieses Gegenstandes ist um so wichtiger, da er bisher von den Mathematikern ziemlich vernachlässigt worden ist*), und alle Mittel, die man bis jetzt zur Auffindung dieser

*) Man vergl. *théorie des nomb. art.* 116.

Werthe vorgeschlagen hat, zuletzt auf ein unsicheres Probiren zurückkommen, so daſs die folgende Methode wohl die erste ist, welche diese Aufgabe direct löst, und zugleich so genaue Werthe giebt, als man es wünscht. Die Idee, auf welcher diese Methode beruht, ist folgende. Im Vorhergehenden wurde gezeigt, wie man Reihen (C_1), (C_2), (C_3) u. s. w. bilden kann, deren $n$tes Glied, wenn n groſs genug genommen wird, bezüglich den Werth von $\alpha_1^n . \alpha_2^n$, $\alpha_1^n . \alpha_2^n . \alpha_3^n$, $\alpha_1^n . \alpha_2^n . \alpha_3^n . \alpha_4^n \ldots$ angiebt. Kann man nun andere Reihen (D_1), (D_2), (D_3) .... bilden, deren $n$tes Glied den Werthen von

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1^n . \alpha_2^n),\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1^n . \alpha_2^n . \alpha_3^n),\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1^n . \alpha_2^n . \alpha_3^n . \alpha_4^n)$$

entspricht, so erhält man, indem man das $n$te Glied der Reihe (D_1) durch das $n$te Glied der Reihe (C_1) dividirt, den Werth von $\alpha_1 + \alpha_2$, und eben so erhält man, wenn man das $n$te Glied der Reihe (D_2), (D_3) u. s. w. bezüglich durch das $n$te Glied der Reihe (C_2), (C_3) u. s. w. dividirt, die Werthe von $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ u. s. w. Aus den Reihen (C_1), (C_2) u. s. w. haben sich aber schon die Werthe von $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ u. s. w. ergeben. Man kennt daher Summe und Product der zwei, drei, vier u. s. w. ersten Wurzeln, woraus man Summe und Product jeder zwei aufeinander folgender Wurzeln finden kann. Sind daher zwei solche Wurzeln imaginair, so findet man ihren Werth aus dem bekannten Werthe von Summe und Product.

Die Reihen (D_1), (D_2), (D_3) u. s. w., sind aber leicht aus den Gliedern der Reihe (C) zu bilden. Man erhebe alle Wurzeln auf die $n$te Potenz, und bilde aus den Elementen $\alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_m^n$ alle Combinationen, ohne Wiederholung, zu zwei Elementen, und multiplicire jedes Product $\alpha_r^n . \alpha_s^n$ mit der Summe $\alpha_r + \alpha_s$; die Summe aller auf diese Weise entstehenden Glieder werde durch $\Sigma(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1^n \alpha_2^n$ angedeutet; eben so bezeichne $\Sigma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\alpha_1^n \alpha_2^n \alpha_3^n$ die Summe der Glieder, welche man erhält, wenn man aus den zur $n$ten Potenz erhobenen Wurzeln alle Combinationen ohne Wiederholung zu drei Elementen bildet, und jedes Product durch die Summe der darin enthaltenen Wurzeln multiplicirt u. s. w. Alsdann hat man

$$12. \quad \Sigma(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1^n . \alpha_2^n = \Sigma\alpha_1^{n+1} . \Sigma\alpha_1^n - \Sigma\alpha_1^{2n+1}.$$

Nimmt man n groſs genug, so wird jedes der übrigen in $\Sigma(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1^n . \alpha_2^n$ enthaltenen Glieder gegen das erste $(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1^n . \alpha_2^n$ ganz unbedeutend sein, und man wird daher n so groſs annehmen können, daſs man, ohne merklichen Fehler zu begehen,

$$(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1^n\,\alpha_2^n = \Sigma\alpha_1^{n+1}.\Sigma\alpha_1^n - \Sigma\alpha_1^{2n+1}$$

setzen kann. Bildet man also eine Reihe

$$(D_1) = \Sigma\alpha_1^2.\Sigma\alpha_1 - \Sigma\alpha_1^3,\ \ \Sigma\alpha_1^3.\Sigma\alpha_1^2 - \Sigma\alpha_1^5,\ \ \Sigma\alpha_1^4.\Sigma\alpha_1^3 - \Sigma\alpha_1^7,\ \ldots.$$

und dividirt das $n$te Glied derselben durch das $n$te Glied der Reihe (C), so wird der Quotient sich dem Werthe $\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$ desto mehr nähern, je gröfser n genommen wird. Dies gilt jedoch nur für den Fall, wenn α_1 und α_2 beide reell oder beide imaginair sind; ist aber α_1 reell, α_2 imaginair, so wird die Reihe (D_1) divergiren.

Ferner hat man

$$13.\quad 2\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n$$
$$= \Sigma\alpha^{n+1}.(\Sigma\alpha_1^n)^2 - (2\Sigma\alpha_1^{2n+1}.\Sigma\alpha_1^n + \Sigma\alpha_1^{2n}.\Sigma\alpha_1^{n+1}) + 2\Sigma\alpha_1^{3n+1}.$$

Ist n grofs genug, so kann man statt $\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n$ auch blofs $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1^n.\alpha_2^n\,\alpha_3^n$ setzen; bildet man daher eine Reihe (D_2), deren allgemeines Glied $\Sigma\alpha_1^{n+1}.(\Sigma\alpha_1^n)^2 - (2\Sigma\alpha_1^{2n+1}.\Sigma\alpha_1^n + \Sigma\alpha_1^{2n}.\Sigma\alpha_1^{n+1}) + 2\Sigma\alpha_1^{3n+1}$ ist, und dividirt das $n$te Glied dieser Reihe durch das $n$te Glied der Reihe (C_2), so wird der Quotient sich dem Werthe $\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ desto mehr nähern, je gröfser n ist. Ausgenommen ist der Fall, wenn α_3 die erste zweier imaginairer Wurzeln ist, weil alsdann die Reihe (D_2) eben so wie die Reihe (C_2) kein Resultat giebt.

Weiter findet man

$$14.\quad 2.3.\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$$
$$= \Sigma\alpha_1^{n+1}.(\Sigma\alpha_1^n)^3 - (3\Sigma\alpha_1^{2n+1}.(\Sigma\alpha_1^n)^2 + 2\Sigma\alpha_1^{2n}.\Sigma\alpha_1^{n+1}.\Sigma\alpha_1^n)$$
$$+ 2(3\Sigma\alpha^{3n+1}.\Sigma\alpha_1^n + \Sigma\alpha_1^{3n}.\Sigma\alpha_1^{n+1}) - 2.3\Sigma\alpha_1^{4n+1} + 2\Sigma\alpha_1^{2n+1}.\Sigma\alpha_1^{2n}.$$

Nimmt man n grofs genug, so kann man statt $\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$ blofs $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$ setzen; bildet man daher eine Reihe (D_3), deren $n$tes Glied der zweite Theil der Gleichung (14.) ist, so nähert sich der Quotient, den man erhält, wenn man das $n$te Glied dieser Reihe durch das $n$te Glied der Reihe (C_3) dividirt, dem Werthe $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$ desto mehr, je gröfser n ist; ausgenommen ist jedoch wieder der Fall, wenn α_4 die erste zweier zusammengehörender imaginairer Wurzeln ist. Wir würden auf ähnliche Weise zeigen können, wie man allgemein eine Reihe bilden kann, deren $n$tes Glied

$$= 2.3\ldots.r-1\,\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_r)\alpha_1^n.\alpha_2^n\ldots.\alpha_r^n$$

ist, woraus alsdann der Werth von $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_r)\alpha_1^n\,\alpha_2^n\ldots.\alpha_r^n$ gefunden wird, begnügen uns aber, der Kürze halber, auf ein schon angeführtes Werk *)

*) Waring *meditat. analyt. probl.* 3. *pag.* 8.

zu verweisen, aus welchem die erwähnte Reihe leicht gefunden werden kann, und bemerken nur noch, dafs hier, eben so wie bei den Reihen (C), (C_1), (C_2), ..., nie zwei auf einander folgende Reihen divergent sein können.|

102.

In §. 100. wurde gefunden, dafs die Gleichung

$$x^5+x^4+x^3-2x^2+2x-1=0$$

als erste Wurzeln zwei imaginaire hat; es soll deren Werth gefunden werden.

Aus der dort gefundenen Reihe (C) leite man die Reihe (D_1) ab. Man findet

$(D_1) = -7,\ -22,\ -51,\ -183,\ -511,\ -1582,\ -4598,\ -13697,$
$-40622,\ -120611,\ ....,\ -12970774286976.$

Die Zahl -12970774286976 ist 27ste Glied der Reihe (D_1); das 27ste Glied der Reihe (C_1) ist $=11403238645380$, man hat daher

$$\alpha_1+\alpha_2 = 2.\frac{-12970774286976}{11403238645380} = -2{,}274928;$$

verbindet man diesen Werth mit dem schon gefundenen

$$\alpha_1.\alpha_2 = 2{,}968001,$$

so erhält man als Werth der zwei imaginairen Wurzeln

$$-1{,}137464 \pm \sqrt{(-1{,}674177)} = -1{,}137464 \pm 1{,}2939\sqrt{(-1)}.$$

Die letzte Wurzel α_5 ist, wie früher gefunden wurde, reell und $=0{,}852842$.

Nun hat man

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5) = -1,$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 = 1.$$

Substituirt man in diesen zwei Gleichungen die Werthe von α_1, α_2, α_5, so findet man

$$\alpha_3+\alpha_4 = 0{,}422086,$$
$$\alpha_3.\alpha_4 = \frac{1}{2{,}5312359} = 0{,}395064,$$

hieraus findet man die Werthe der zwei imaginairen Wurzeln α_3, α_4,

$$0{,}211043 \pm \sqrt{(-0{,}350525)} = 0{,}211043 \pm 0{,}5920516\sqrt{(-1)}.$$

Directer, aber weniger bequem, hätte man den Werth von α_3, α_4 finden können, wenn man die Reihe (D_3) gebildet hätte.

Um noch ein Beispiel der Anwendung des Vorhergehenden zur Auffindung der Werthe der imaginairen Wurzeln zu geben, soll die Gleichung

$$x^4-x+1=0$$

aufgelöst werden, die Legendre *) behandelt hat. Man findet

*) *Théor. des nombr. art.* 118.

$$(C) = \overset{1}{0},\ \overset{2}{0},\ \overset{3}{3},\ \overset{4}{-4},\ \overset{5}{0},\ \overset{6}{3},\ \overset{7}{-7},\ \overset{8}{4},\ \overset{9}{3},\ \overset{10}{10},\ \overset{11}{11},\ \overset{12}{-1},\ \overset{13}{-13},\ \overset{14}{21},\ \overset{15}{-12},$$
$$\overset{16}{-12},\ \overset{17}{34},\ \overset{18}{-33},\ \overset{19}{0},\ \overset{20}{46},\ \overset{21}{-67},\ \overset{22}{33},\ \overset{23}{46},\ \overset{24}{-113},\ \overset{25}{100},\ \overset{26}{13},\ \overset{27}{-159},\ \overset{28}{213},$$
$$\overset{29}{-87},\ \overset{30}{-172},\ \overset{31}{372},\ \overset{32}{-300},\ \overset{33}{-85},\ \overset{34}{544},\ \overset{35}{-672},\ \overset{36}{215},\ \overset{37}{629},\ \overset{38}{-1216},\ \overset{39}{887},$$
$$\overset{40}{414},\ \overset{41}{1845}$$

$$(C_1) = 0,\ 4,\ 6,\ 12,\ 10,\ 10,\ 28,\ 28,\ 42,\ 54,\ 88,\ 114,\ 156,\ 228,\ 316,\ 444,\ 610,\ 874,\ 1216,\ 1702.$$

Die zwei ersten Wurzeln sind also imaginair, und man findet als Näherungswerthe

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{874}{610} = 1{,}43\ldots.,\quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{1216}{874} = 1{,}402,\quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{1702}{1216} = 1{,}399.$$

Man setze daher

$$\alpha_1\alpha_2 = 1{,}4$$

Ferner ist

$$(D_1) = -3,\ 3,\ -5,\ -7,\ -11,\ -8,\ -16,\ -22,\ -30,\ -43,\ -57,\ -87,\ -144,\ -165,\ -228,\ -323,\ -450,\ -629,\ -887,\ -1237,$$

also

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{2.1237}{1702} = -1{,}453584.$$

Hieraus findet man, als Werth der zwei ersten Wurzeln α_1, α_2,

$$-0{,}726792 \pm 0{,}933634\sqrt{(-1)}.$$

Die Werthe der zwei anderen Wurzeln, α_3, α_4, findet man aus den Gleichungen

$$\alpha_3 . \alpha_4 = \frac{1}{1{,}4},\quad \alpha_3 + \alpha_4 = 1{,}453584,$$

woraus man die Werthe $0{,}726792 \pm 0{,}4313455\sqrt{(-1)}$ erhält; statt dieser Werthe hat Legendre $0{,}727136 \pm 0{,}430014\sqrt{(-1)}$.

103.

Indem ich mir eine ausführlichere Behandlung des Zusammenhangs zwischen den recurrirenden Reihen und den Wurzeln der Gleichungen auf eine andere Gelegenheit aufbewahren muſs, füge ich nur noch folgende Bemerkungen hinzu.

I. Aus derselben Idee, auf welcher die in den vorigen §§. gelehrte Methode beruht, lassen sich eine Menge anderer ähnlicher Methoden ableiten. Es wurden nemlich dort Reihen gebildet, deren $n$tes Glied $= \alpha_1^n . \alpha_2^n \ldots . \alpha_r^n$, und andere, deren $n$tes Glied $= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . + \alpha_r)\alpha_1^n . \alpha_2^n \ldots . \alpha_r^n$ ist, wodurch Summe und Product der r Wurzeln $\alpha_1\alpha_2 \ldots . \alpha_r$ gefunden wurden. Man sieht aber leicht, daſs man denselben Zweck erreichen kann, wenn man Reihen bildet, deren $n$tes Glied $= \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_r)\alpha_1^n . \alpha_2^n \ldots . \alpha_r^n$, und andere, deren $n$tes Glied $= \varphi(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r)\alpha_1^n . \alpha_2^n \ldots \alpha_r^n$

ist, wo $\varphi(\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_r)$ eine Function der ersten r Wurzeln bedeutet, in der sie alle auf gleiche Weise enthalten sind. Solche Reihen lassen sich aber wirklich auf mannichfaltige Weise bilden, und es sind daher auch mannichfaltige Auflösungsmethoden möglich. So z. B. hätte man um die Producte der Wurzeln zu finden, statt der Reihen (C_1) (C_2) u. s. w. auch die Reihen (D_1), (D_2) u. s. w. anwenden können, weil, wenn man jedes Glied der letzteren Reihen durch das vorhergehende dividirt, der Quotient sich ebenfalls den Producten $\alpha_1 . \alpha_2$, $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3$ u. s. w. nähert.

II. Von den Reihen (C_1), (C_2) .... ist jede folgende mühseliger zu bilden, als die vorhergehende, weil die Glieder jeder späteren Reihe zusammengesetzter sind, als die einer früheren. Ist daher die gegebene Gleichung von hohem Grade, so kann die Berechnung der Reihen sehr umständlich werden. Man kann sich aber die Mühe sehr erleichtern. Ist nemlich eine Gleichung vom $2m$ten Grade

$$x^{2m} + A_1 . x^{2m-1} + \ldots . + A_{2m} = 0$$

gegeben, so braucht man nicht aus der ersten Reihe (C), $2m-1$ andere Reihen (C_1), $(C_2) \ldots . (C_{2m-1})$, und $2m-1$ andere (D_1), $(D_2) \ldots . D_{2m-1}$ abzuleiten, sondern man leite aus der ersten (C) nur $m-1$ Reihen (C_1), $(C_2) \ldots . C_{m-1}$, und $m-1$ andere (D_1), $(D_2) \ldots . (D_{m-1})$ ab; hierdurch erfährt man die Werthe der ersten m Wurzeln, $\alpha_1 \alpha_2 \ldots . \alpha_m$. Um alsdann den Werth der folgenden m Wurzeln zu erfahren, substituire man in der gegebenen Gleichung statt x den Werth $\frac{1}{y}$. Hierdurch erhält man eine neue Gleichung vom $2m$ten Grade, in der y die unbekannte Gröfse ist. Man suche nun wieder mit Hülfe der recurrirenden Reihen die m ersten Wurzeln dieser Gleichung: kennt man diese, so kennt man auch die m letzten Wurzeln der ersten Gleichung, da, vermöge der Gleichung $x = \frac{1}{y}$, den gröfsten Werthen von y die kleinsten Werthe von x entsprechen.

III. Durch Umbildung der gegebenen Gleichungen in andere kann man oft Reihen erhalten, die viel schneller convergiren, als diejenigen, die man aus den ursprünglichen Gleichungen erhält, wie schon Euler hinsichtlich der Reihe (C) gezeigt hat. Man wird sich aber durch Vergleichung sehr bald überzeugen, dafs die Methoden, die auf Anwendung des Theorems (A) beruhen, viel bequemer sind, als die Methode der recurrirenden Reihen, sobald es nur darauf ankommt, die Werthe der reellen Wurzeln zu finden.

Sechstes Capitel.

Fernere Anwendung der Kettenbrüche auf die Theorie der Gleichungen.

104.

Es sei die allgemeine Gleichung des zweiten Grades *)

$$1.\quad \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$$

gegeben, so hat man

$$2.\quad (\alpha x + \beta) x = \gamma \text{ und}$$

$$3.\quad x = \frac{\gamma}{\beta + \alpha x} = \frac{\gamma}{\beta + \frac{\alpha . \gamma}{\beta + \alpha x}} = F(\gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta \text{ etc.}),$$

so daſs also die eine Wurzel der quadratischen Gleichung durch einen unendlichen periodischen Kettenbruch ausgedrückt ist. Auf ähnliche Weise findet man den Werth der zweiten Wurzel. Denn aus Gleichung (2.) folgt

$$\alpha x = -\beta + \frac{\gamma}{x},$$

oder

$$4.\quad x = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha x} = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{-\beta + \frac{\gamma}{x}} = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{-\beta + \frac{\gamma}{\frac{-\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha x}}},$$

und nach gehöriger Reduction findet man hieraus

$$5.\quad x = -F\left(\frac{\beta}{\alpha} + \gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta \text{ etc.}\right).$$

Diesen Werth hätte man auch unmittelbar aus (3.) ableiten können, da die Summe beider Wurzeln $-\frac{\beta}{\alpha}$ sein muſs.

Sind die Wurzeln der Gleichung (1.) reell, so kann man daher durch die Formeln (3.) und (4.) Näherungswerthe derselben finden, und und zwar erhält man nach §. 5., wenn man m Theilnenner zur Berechnung anwendet, und $\alpha\gamma = \delta$ setzt, aus (3.) die Formel

*) Euler *Introd. in anal. inf. cp.* 18.

$$6.\quad x = \frac{\gamma\left[\beta^{m-1} + (m-2)\beta^{m-3}.\delta + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\beta^{m-5}.\delta^2 + \text{etc.}\right]}{\beta^m + (m-1)\beta^{m-2}.\delta + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\beta^{m-4}.\delta^2 \text{ etc.}},$$

und aus (5.) die Formel

$$7.\quad x = -\frac{\frac{1}{\alpha}\left[\beta^m + (m-1)\beta^{m-2}.\delta + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\beta^{m-4}.\delta^2 + \text{etc.}\right]}{\beta^{m-1} + (m-2)\beta^{m-3}.\delta + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\beta^{m-5}.\delta^2 + \text{etc.}}.$$

Nur in dem Falle, wenn $\beta = 0$ ist, sind diese Formeln zur Berechnung untauglich.

So wie die Wurzel jeder quadratischen Gleichung durch einen periodischen Kettenbruch ausgedrückt werden kann, so ist auch umgekehrt jeder unendliche periodische Kettenbruch die Wurzel einer quadratischen Gleichung. Fängt die Periode schon beim zweiten Theilbruch an, so dafs z. B. der Kettenbruch

$$= F(a + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 + \ldots . b_m : a_m + b_1 : a_1 + \ldots . b_m : a_m \text{ in inf.})$$

ist, so hat man

$$8.\quad x = a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_m}{a_m + x - a}}} = \frac{(a_m + x - a).a,\ a_{m-1} + b^m.a,\ a_{m-2}}{(a_m + x - a).a_1,\ a_{m-1} + b^m.a_1,\ a_{m-2}} \text{ (§. 7.)},$$

welcher Ausdruck auf eine quadratische Gleichung zurückführt, deren Wurzel x ist. Sind mehrere der ersten Theilbrüche nicht in der Periode enthalten, so dafs man z. B. den Kettenbruch

$$x = F(c + d_1 : c_1 + d_2 : c_2 + \ldots . d_m : c_m + b_1 : a_1 + \ldots . b_m : a_m \text{ etc.}$$

hat, wo sich die Theilbrüche $\frac{b_1}{a_1}, \ldots . \frac{b_m}{a_m}$ periodisch wiederholen, so kann man statt x den Werth $x = c + \cfrac{d_1}{c_1 + \cdots + \cfrac{d_m}{y}}$ einführen, wo

$$y = F(c_m + b_1 : a_1 + \ldots . + b_m : a_m + b_1 : a_1 + \ldots . + b_m : a_m \text{ etc.})$$

ist; nun ist, wie eben bewiesen wurde, y die Wurzel einer quadratischen Gleichung, folglich auch x eine solche.

105.

Auch die Wurzeln einer Gleichung des dritten Grades können auf ähnliche Weise entwickelt werden. Da eine solche Gleichung immer auf die Form

$$9.\quad x^3 - ax - b = 0$$

zurückgeführt werden kann, so hat man

$$(x^2 - a)x = b \text{ oder } x^2 = a + \frac{b}{x},$$

also

$$10.\quad x = \sqrt{\left(a + \frac{b}{\sqrt{\left(a + \frac{b}{\sqrt{(a + \text{etc.})}}\right)}}\right)},$$

wo sich jedes Wurzelzeichen auf den ganzen folgenden Ausdruck bezieht. Da jede Gleichung des 4ten Grades auf eine andere des 3ten Grades zurückgeführt werden kann, so können auch die Gleichungen des 4ten Grades auf dieselbe Weise aufgelöst werden.

Eben so erhält man aus der Gleichung

$$11.\quad x^{m+1} - ax - b = 0,$$

$$x^m - a = \frac{b}{x},$$

und

$$12.\quad x = \sqrt[m]{\left(a + \frac{b}{\sqrt[m]{\left(a + \frac{b}{\sqrt[m]{(a + \text{etc.})}}\right)}}\right)},$$

und die Gleichung

$$13.\quad (x^m - a)^n (cx + d) = bx$$

giebt

$$x^m - a = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{c + \frac{d}{x}}\right)},$$

und

$$14.\quad x = \sqrt[m]{\left(a + \sqrt[n]{\left(\frac{b}{c + \frac{d}{\sqrt[m]{\left(a + \sqrt[n]{\left(\frac{b}{c + \frac{d}{\sqrt[m]{a + \text{etc.}}}}\right)}\right)}}}\right)}\right)}.$$

Die Ausdrücke (10.), (12.), (14.), sind jedoch keine Kettenbrüche in dem Sinne, in welchem dieses Wort bisher genommen wurde, da die einzelnen Theilbrüche nicht von einander unabhängig, sondern durch gewisse Operationen mit einander verbunden sind. Daher übergehe ich eine genauere Erörterung derselben, wiewohl sie eine solche, namentlich in Beziehung auf Convergenz und Divergenz, wohl verdienten.

106.

Statt der Formeln (3.) und (5.) könnte man noch eine Menge anderer entwickeln, die den Werth der Wurzeln der Gleichung (1.) angäben. Denn substituirt man statt x den Werth $y+\varepsilon$, so geht die Gleichung (1.) in folgende über:

$$15.\quad \alpha y^2+(2\alpha\varepsilon+\beta)y+\varepsilon^2+\beta\varepsilon-\gamma=0;$$

setzt man $\frac{2\alpha\varepsilon+\beta}{\alpha}=p$, $\frac{\varepsilon^2+\beta\varepsilon-\gamma}{\alpha}=-q$, so findet man

$$16.\quad y=\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{p}},$$

oder

$$17.\quad y=-(p+\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{p\text{ etc.})}},$$

also

$$18.\quad x=\varepsilon+\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{p\text{ etc.}}}\quad\text{oder}\quad 19.\quad x=\varepsilon-p-\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{p\text{ etc.}}}.$$

107.

Am wichtigsten ist die Entwickelung der Wurzel einer quadratischen Gleichung unter der Form eines Kettenbruchs, dessen Theilzähler alle $=1$ und dessen Theilnenner ganze positive Zahlen sind. Um diesen Ausdruck zu finden, könnte man die in §. 87. gezeigte Methode anwenden, oder auch zuerst die Gleichung

$$\alpha x^2+\beta x-\gamma=0\ ^{*})$$

auflösen, und dann den Werth der Wurzeln $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}}{2\alpha}$ in einen solchen Kettenbruch verwandeln (§. 86.). Die Operation schreitet aber viel leichter fort, wenn man folgende Methode anwendet **).

---

*) Es wird hier immer vorausgesetzt, dafs α, β, γ ganze Zahlen, und die Wurzeln der Gleichung reell sind.

**) Legendre *theor. d. nombr. art.* 59.

Man sei in der Entwickelung bis an den Theilnenner α_m gekommen, so dafs man als Werth der einen Wurzel

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha} = {}^{*)} F(a + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_{m-1} + 1 : a_m + 1 : z)$$

gefunden hat. Die Wurzel wird hier immer positiv gedacht; wäre sie negativ, so könnte man $-z$ statt x setzen, und den Werth von z betrachten. Es ist also

$$19. \quad \frac{-\beta + \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha} = \frac{z.a,\ a_m + a,\ a_{m-1}}{z.a_1,\ a_m + a_1,\ a_{m-1}} \ (\S.\ 7.),$$

und

$$20. \quad z = \frac{-\beta.a_1,\ a_{m-1} - 2\alpha.a,\ a_{m-1} + a_1,\ a_{m-1}\sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{\beta.a_1,\ a_m + 2\alpha.a,\ a_m - a_1,\ a_m\sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit

$$\beta.a_1,\ a_m + 2\alpha.a,\ a_m + a_1,\ a_m\sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}$$

multiplicirt, und zugleich bedenkt, dafs $a,\ a_m.a_1,\ a_{m-1} - a,\ a_{m-1}.a_1,\ a_m = \pm 1$ ist (§. 15.), so findet man

$$21. \quad z = \frac{\sqrt{A} + I}{D},$$

wo

$$22. \quad A = \tfrac{1}{4}(4\alpha\gamma + \beta^2),$$

$$23. \quad \pm I = -\tfrac{1}{2}\beta(a,a_m.a_1,a_{m-1} + a_1,a_m.a,a_{m-1}) - \alpha.a,a_m.a,a_{m-1} + \gamma.a_1,a_m.a_1,a_{m-1},$$

$$24. \quad \pm D = \alpha.(a,a_m)^2 + \beta.a,a_m.a_1,a_m - \gamma.(a_1,a_m)^2$$

ist. D ist also immer eine ganze Zahl. Da ferner

$$a,\ a_m.a_1,\ a_{m-1} = a,\ a_{m-1}.a_1,\ a_m \pm 1$$

ist, so mufs eine der Zahlen $a,\ a_m.a_1,\ a_{m-1}$ und $a,\ a_{m-1}.a_1,\ a_m$ gerade, die andere ungerade, also ihre Summe eine ungerade Zahl sein: folglich ist I eine ganze Zahl, wenn β gerade ist; im entgegengesetzten Fall enthält es den Nenner 2. Setzt man $z = a_{m+1} + \frac{1}{z_1}$, so kann man wieder auf ähnliche Weise

$$25. \quad z' = \frac{\sqrt{A} + I'}{D'},$$

und eben so, wenn man $z_, = a_{m+2} + \frac{1}{z_{,,}}$ setzt,

$$26. \quad z_{,,} = \frac{\sqrt{A} + I''}{D''}$$

finden. Die Werthe von $I_,$, $D_,$ und von $I_{,,}$, $D_{,,}$ kann man unmittelbar

---

*) Es wird im Folgenden immer vorausgesetzt, dafs x gröfser als 1 ist; im entgegengesetzten Falle könnte man $\frac{1}{x}$ statt x betrachten.

aus den Werthen von I, D ableiten, indem man überall statt m bezüglich $m+1$, $m+2$ substituirt; nur mufs man nicht vergessen, jedem folgenden Gliede in der Reihe $I, I_{,}, I_{,,}, \ldots$ und eben so in der Reihe $D, D_{,}, D_{,,}, \ldots$ das entgegengesetzte Zeichen des vorhergehenden zu geben, da z. B.

$$a, a_{m+1} . a_1, a_m - a, a_m . a_1, a_{m+1} = \mp 1$$

ist, wenn $a, a_m . a_1, a_{m-1} - a_1, a_m . a, a_{m-1} = \pm 1$ ist. Aus (21.) und (25.) folgt

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D} = a_{m+1} + \frac{D_{,}}{\sqrt{A}+I_{,}},$$

oder

$$A + \sqrt{A}.I + \sqrt{A}.I_{,} + II_{,} = a_{m+1}.D.\sqrt{A} + a_{m+1}.D.I_{,} + DD_{,}.$$

Hieraus erhält man die zwei Gleichungen

$$27. \quad I_{,} = a_{m+1}.D - I,$$

$$28. \quad A = (a_{m+1}.D - I)I_{,} + DD_{,},$$

und wenn man den Werth von $I_{,}$ aus (27.) in (28.) substituirt,

$$29. \quad A = I_{,}^2 + DD_{,},$$

oder

$$30. \quad D_{,} = \frac{A - I_{,}^2}{D}.$$

Man setze daher im Anfange der Entwickelung $\frac{-\beta}{2} = I$, $\alpha = D$, und die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene Zahl $= N$; alsdann ist der erste Theilnenner a die gröfste in $\frac{N+I}{D}$ enthaltene Zahl; dann ist $I_{,} = aD - I$, $D_{,} = \frac{A - I_{,}^2}{D}$; aus N, $D_{,}$, $I_{,}$ findet man wieder den zweiten Theilnenner a_1, und so kann man den ganzen Kettenbruch entwickeln. Die folgenden Nenner $D_{,,}$, $D_{,,,}$ u. s. w. können auch auf folgende Weise gefunden werden. Aus (27.) und (29.) folgt

$$31. \quad I_{,,} = a_{m+2}.D_{,} - I_{,},$$

$$32. \quad A = I_{,,}^2 + D_{,}D_{,,},$$

also

$$I_{,}^2 + DD_{,} = I_{,,}^2 + D_{,}D_{,,}$$

oder

$$D_{,,} = \frac{I_{,}^2 - I_{,,}^2}{D_1} + D;$$

nun ist

$$I_{,} + I_{,,} = a_{m+2}.D_{,} \ (31.),$$

folglich

$$33. \quad D_{,,} = (I_{,} - I_{,,})a_{m+2} + D.$$

Im Anfange der Entwickelung kann es vorkommen, dafs die Nenner $D, D_{,}, \ldots$ abwechselnd positiv und negativ sind. Sind nemlich die Wurzeln der Gleichung noch nicht getrennt, so dafs beide zwischen $\frac{a, am}{a_1, a_m}$ und $\frac{a, a_{m+1}}{a_1, a_{m+1}}$

liegen (§. 87.), und substituirt man diese Werthe nach einander statt x in der gegebenen Gleichung, so erhält man die Werthe

$$A.\quad \alpha(a, a_m)^2 + \beta . a, a_m . a_1, a_m - \gamma(a_1, a_m)^2 \; \ldots,$$
$$B.\quad \alpha(a, a_{m+1})^2 + \beta . a, a_{m+1} . a_1, a_{m+1} - \gamma(a_1, a_{m+1})^2 \ldots,$$

die nothwendig dasselbe Zeichen haben müssen, da zwischen $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ und $\frac{a, a_{m+1}}{a_1, a_{m+1}}$ zwei Werthe liegen müssen, die, statt x substituirt, den ersten Theil der Gleichung auf Null reduciren. Nun ist

$$D = \pm(A),\; D_1 = \mp(B);$$

also haben D und D_1 in diesem Falle verschiedene Zeichen. Geht man aber in der Entwickelung weiter fort, so werden die Wurzeln getrennt, und man kommt bald an zwei Näherungswerthe $F(a, a_m)$, $F(a, a_{m+1})$, die nur Eine Wurzel zwischen sich enthalten, so daſs alsdann $(A.)$ und $(B.)$ verschiedene, und daher D und $D_,$ gleiche Zeichen haben. Ist man so weit gekommen, so ist $DD_,$ eine positive Zahl, und daher der Werth von $I_,$ innerhalb bestimmter Grenzen eingeschlossen, indem $I_,^2 = A - DD_,$, also

$$34.\quad I_, < \sqrt{A}$$

ist, und da $a_{m+2} D_, = I_, + I_{,,}$, so folgt

$$35.\quad D_, < 2\sqrt{A},$$

so daſs auch die Nenner $D_,$, $D_{,,}$ .... zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossen sind. Da aber der Kettenbruch ins Unendliche fortläuft, $D_,$ und $2I$ aber ganze Zahlen sind, so müssen auch dieselben zusammengehörenden Werthe von $D_,$ und $I_,$ sich unendlich oft wiederholen. Hieraus folgt, daſs nach einer gewissen Anzahl von Theilnennern (die auch Null sein kann) der Kettenbruch periodisch wird, d. h. daſs von dort an dieselbe Reihe von Theilnennern sich ins Unendliche wiederholt. Übrigens folgt aus den Formeln (34.) und (35.), daſs die Anzahl der in jeder Periode enthaltenen Theilnenner kleiner als $\sqrt{A} . 2\sqrt{A} = 2A$ sein muſs.

108.

Es folgt hieraus, daſs die eine Wurzel der quadratischen Gleichung $x = \frac{-\beta + \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha}$ in einen periodischen Kettenbruch, dessen Theilzähler alle $= 1$ sind, entwickelt werden kann. Was nun die andere Wurzel betrifft, so wird der ihr entsprechende Kettenbruch unmittelbar durch folgendes Theorem gefunden. Wird der Werth von $x = \frac{-\beta + \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha}$ durch den Kettenbruch

$$x = b + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{b_m + \cfrac{1}{F(a + 1:a_1 + \ldots + 1:a_m + 1:a + 1:a_1 + \ldots + 1:a_m \text{ etc.})}}}}$$

ausgedrückt, so dafs die Theilnenner $b, b_1, \ldots b_m$ nicht in der Periode vorkommen, dagegen die Theilnenner $a, a_1, \ldots a_m$ sich periodisch wiederholen, so ist

$$\frac{-\beta - \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha} = b + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{b_m - F(a_m + 1:a_{m-1} + \ldots + 1:a + 1:a_m + 1:a_{m-1} + \ldots + 1:a \text{ etc.})}}},$$

so dafs die nicht periodischen Theilnenner wieder dieselben sind, und in derselben Ordnung vorkommen, die periodischen dagegen ebenfalls dieselben sind, aber in umgekehrter Ordnung erscheinen. Man betrachte zuerst den Fall, wenn nur ein nicht periodischer Theilnenner b_m vorhanden ist. Alsdann ist

$$\frac{-\beta + \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha} = x = F(b_m + 1:a + 1:a_1 + \ldots + 1:a_m \text{ etc.}),$$

oder

$$x = b_m + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{a_m + x - b_m}}}} \quad \text{(Form. 8.)} = b_m + \frac{(a_m + x - b_m)a_1, a_{m-1} + a_2, a_{m-1}}{(a_m + x - b_m)a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1}}$$

oder

$$x = b_m + \frac{(x - b_m)a_1, a_{m-1} + a_1, a_m}{(x - b_m)a, a_{m-1} + a, a_m}.$$

Hieraus folgt

$$36. \quad x = b_m - \frac{[(b_m - x)a, a_m + a_1, a_m]}{(b_m - x)a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1}}.$$

Setzt man nun

$$x_1 = b_m - F(a_m + 1:a_{m-1} + \ldots + 1:a + 1:a_m + \ldots + 1:a \text{ etc.}),$$

so ist

$$x_1 = b_m - \left(a_m + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b_m - x_1}}}}\right),$$

oder

$$37.\quad x_1 = b_m - \frac{[(b_m - x_1)a_m, a + a_m, a_1]}{(b_m - x_1)a_{m-1}, a + a_{m-1}, a_1}.$$

Da nun

$a_m, a = a, a_m;\ a_m, a_1 = a_1, a_m;\ a, a_{m-1} = a_{m-1}, a;\ a_1, a_{m-1} = a_{m-1}, a$

ist, so sind die Ausdrücke (36.) und (37.) durchaus identisch, wenn man x mit x_1 vertauscht; daher muſs x_1 die andere Wurzel derselben Gleichung sein, deren eine Wurzel x ist, oder es ist $x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha}$.

Ist nun die Wurzel einer quadratischen Gleichung

$= y = F(b + 1 : b_1 + \ldots . + 1 : b_m + 1 : a + 1 : a_1 + \ldots . + 1 : a_m \text{ etc.})$,

so daſs $b, b_1 \ldots . b_m$ die nicht periodischen Theilnenner sind, und führt man statt y eine andere unbekannte Gröſse ein, so daſs

$$y = b + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{b_{m-1} + \cfrac{1}{x}}}},$$

und $x = F(b_m + 1 : a + \ldots . + 1 : a_m \text{ etc.})$ ist, so erhält man eine andere quadratische Gleichung, deren eine Wurzel x, und deren andere daher $x_1 = b_m - F(a_m + 1 : a_{m-1} + \ldots . + 1 : a + 1 : a_m \ldots . + 1 : a \text{ etc.})$ ist; folglich ist die Wurzel der ursprünglichen Gleichung

$$y_1 = F(b + 1 : b_1 + \ldots . + 1 : b_{m-1} + 1 : x_1)\ ^*).$$

Entwickelt man die Gleichung (36.), so findet man

$$38.\quad a, a_{m-1} . x^2 + (a, a_m - 2b . a, a_{m-1} - a_1, a_{m-1})x$$
$$+ b_m(b_m . a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1}) - b_m . a, a_m - a_1, a_m,$$

folglich

$$\frac{b_m(b_m . a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1})}{a, a_{m-1}} - b_m . \frac{a, a_m}{a, a_{m-1}} - \frac{a_1, a_m}{a, a_{m-1}} = x . x_1,$$

oder, da

$$\frac{b_m . a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1}}{a, a_{m-1}} = F(b_m + 1 : a + \ldots . + 1 : a_{m-1});\ \frac{a, a_m}{a, a_{m-1}} = \frac{a_m, a}{a_{m-1}, a} = F(a_m, a);$$

$$\frac{a_1, a_m}{a, a_{m-1}} = \frac{a_1, a_m}{a, a_m} . a, a_m : \frac{a, a_{m-1}}{a, a_m} . a, a_m = \frac{1}{F(a, a_m)} : \frac{1}{F(a_m, a)} = \frac{F(a_m, a)}{F(a, a_m)},$$

so ist

$$b_m[F(b_m + 1 : a + \ldots . + 1 : a_{m-1}) - F(a_m, a)] - \frac{F(a_m, a)}{F(a, a_m)} = x . x_1.$$

In dem besonderen Falle, wenn $b_m = 0$ ist, hat man, wenn man, statt x, x_1, ihre Werthe substituirt,

---

*) Man vergl. *Théor. des nombr.* §. X., Journ. für die Mathem. Bd. 6. S. 232 ff.

39. $\frac{F(a_m, a)}{F(a, a_m)} = \frac{F(a_m+1:a_{m-1}+\ldots\ldots+1:a+1:a_m+1:a_{m-1}+\ldots\ldots+1:a \text{ etc.})}{F(a+1:a_1 \;+\ldots\ldots+1:a_m+1:a+1:a_1 \;+\ldots\ldots+1\, a_m \text{ etc.})}$.

Die Wahrheit dieses Ausdrucks läfst sich auch erweisen, ohne dafs man nöthig hat, auf die Theorie der Gleichungen zurückzugehen. Schreibt man nemlich statt $F(a+1:a_1+\ldots\ldots+1:a_m+1:a+1:a_1+\ldots\ldots+1:a_m \text{ etc.})$ den Ausdruck $F(a+1:a_1+\ldots\ldots+1:a_m+1:a_{m+1}+1:a_{m+2}+\ldots\ldots+1:a_{2m+1} \text{ etc.})$, so dafs $a=a_{m+1}$, $a_1=a_{m+2}$, ... $a_m=a_{2m+1}$, ..., so hat man

40. $$F(a+1:a_1+\ldots\ldots+1:a_m+1:a_{m+1} \text{ etc.}) = \frac{1}{a_1, a_m}\left(a, a_m \pm \frac{a_1, a_m}{a_1, a_{2m+1} \pm \frac{(a_1, a_m)^2}{a_1, a_{2m+1} \text{ etc.}}}\right) \text{ (§. 24.).}$$

Schreibt man nun eben so statt

$$F(a_m+1:a_{m-1}+\ldots\ldots+1:a+1:a_m+1:a_{m-1}+ \text{ etc.}$$

den Ausdruck

$$F(c+1:c_1+\ldots\ldots+1:c_m+1:c_{m+1}+1:c_{m+2}+\ldots\ldots+c_{2m+1} \text{ etc.}),$$

so dafs

$$c=a_m,\; c_1=a_{m-1},\; c_m=a,\; c_{m+1}=a_m,\; c_{m+2}=a_{m-1}=c_1,\; c_{2m+1}=a=c_m,$$

so hat man:

41. $$F(a_m+1:a_{m-1}+\ldots\ldots+1:a+1:a_m \text{ etc.}) = \frac{1}{c_1, c_m}\left(c, c_m \pm \frac{c_1, c_m}{c_1, c_{2m+1} \pm \frac{(c_1, c_m)^2}{c_1, c_{2m+1} \text{ etc.}}}\right);$$

nun ist $c_1, c_m = a_{m-1}$, $a = a, a_{m-1}$; $c, c_m = a_m$, $a = a, a_m$,

ferner

$$c_1, c_{2m+1} = c_1, c_m \cdot c_{m+1}, c_{2m+1} + c_1, c_{m-1} \cdot c_{m+2}, c_{2m+1} \text{ (§. 7. Form. } D)$$
$$= c_1, c_m(c_{m+1}, c_{2m+1} + c_1, c_{m-1}) = c_1, c_m, (a_m, a + a_{m-1}, a_1) = c_1, c_m(a, a_m + a_1, a_{m-1}).$$

Daher geht die Formel (41.) in folgende über:

42. $$F(a_m+1:a_{m-1}+\ldots) = \frac{1}{a, a_{m-1}}\left(a, a_m \pm \frac{1}{a, a_m + a_1, a_{m-1} \pm \frac{1}{a, a_m + a_1, a_{m-1} \text{ etc.}}}\right).$$

Auch ist

$$a_1, a_{2m+1} = a_1, a_m \cdot a_{m+1}, a_{2m+1} + a_1, a_{m-1} \cdot a_{m+2}, a_{2m+1} = a_1, a_m(a, a_m + a_1, a_{m-1}).$$

Daher geht die Formel (40.) in folgende über:

43. $$F(a+1:a_1+\ldots\ldots+1:a_m \text{ etc.}) = \frac{1}{a_1, a_m}\left(a, a_m \pm \frac{1}{a, a_m + a_1, a_{m-1} \pm \frac{1}{a, a_m + a_1, a_{m-1} \text{ etc.}}}\right).$$

Dividirt man (42.) durch (43.), so kommt man wieder auf (39.) zurück.

Diese letztere Darstellung zeigt zugleich, dafs der Ausdruck (38.)

auch richtig ist, wenn die Theilzähler nicht alle $= 1$, sondern vielmehr $= b_1$ sind.

109.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, wenn die Gleichung (1.) eine reine quadratische, also $\beta = 0$ ist. Alsdann sind die zwei Wurzeln nur im Vorzeichen verschieden: die eine ist $+\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$, die andere $-\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$. Ist also die gröfste in $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ enthaltene Zahl $= b$, so dafs $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)} = b + \frac{1}{k}$ ist, so ist $-\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)} = -\left(b + \frac{1}{k}\right)$. Es kann aber nur der eine Theilnenner b nicht in der Periode enthalten sein; denn da der nicht periodische Theil des Kettenbruches beiden Wurzeln gemein ist, so würden beide Wurzeln, wenn mehr als ein nicht periodischer Theilnenner vorhanden wären, mit demselben positiven Theilnenner b beginnen. Von der anderen Seite mufs ein nicht periodischer Theilnenner nothwendig vorhanden sein, weil der von Anfang an periodische Kettenbruch

$$F(a + 1 : a_1 + \ldots. + 1 : a_m + 1 : a + 1 : a_1 + \ldots. + 1 : a_m \text{ etc.})$$

die Wurzel einer unreinen quadratischen Gleichung ist, wie man aus Formel (38.) findet, wenn man $b_m = 0$ setzt. Es ist also die eine Wurzel

$$44. \quad \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)} = F(b + 1 : a + \ldots. + 1 : a_m + 1 : a + \ldots. + 1 : a_m \text{ etc.}),$$

und daher die andere

$$45. \quad -\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)} = F((b - a_m) - 1 : a_{m-1} + 1 : a_{m-2} + \ldots. + 1 : a + 1 : a_m + \ldots. + 1 : a \text{ etc.}).$$

Hieraus folgt $b - a_m = -b$, oder $a_m = 2b$; ferner

$$a = a_{m-1}, \quad a_1 = a_{m-2}, \quad a_2 = a_{m-3} \text{ etc. (vergl. §. 14.)};$$

d. h. entwickelt man den Werth der Quadratwurzel einer ganzen oder gebrochenen (nicht quadratischen) Zahl unter der Form eines Kettenbruchs, dessen Theilzähler alle $= 1$ sind, so ist der erste Theilnenner nicht in der Periode enthalten: diese fängt vielmehr bei dem zweiten Theilnenner an; und enthält sie $m + 1$ Theilnenner $a, a_1 \ldots. a_m$, so ist der letzte $a_m = 2b$, die übrigen sind paarweis einander gleich, und zwar so, dafs diejenigen, deren Indices zusammengenommen $= m - 1$ sind, gleich sind; ist m eine ungerade Zahl, so hat die Periode einen mittleren Theilnenner, dem kein anderer entspricht (wiewohl er einem der übrigen gleich sein kann).

Es ist leicht einzusehen, dafs umgekehrt jeder Kettenbruch, der die zuletzt betrachtete Form hat, also

$x = V(b+1:a+1:a_1+\ldots+1:a_1+1:a+1:2b+1:a+1:a_1+\ldots+1:a_1+1:a+1:2b$ etc.) ist, die Quadrat-Wurzel einer ganzen oder gebrochenen Zahl ausdrückt, weil er die Wurzel einer quadratischen Gleichung darstellt, deren andere Wurzel $= -x$ ist. Ob aber x^2 eine ganze oder gebrochene Zahl ist, läſst sich leicht entscheiden. Der Kettenbruch (44.) führt nemlich auf die Gleichung

$$a, a_{m-1} . x^2 = b_1 (a, a_m - a_1, a_{m-1}) b^2 . a, a_{m-1} + a_1, a_m \text{ (Form. 38.)};$$

nun ist

$$a, a_m = a_m . a, a_{m-1} + a, a_{m-2} \text{ und } a_m = 2b; \; a, a_{m-2} = a_1, a_{m-1},$$

folglich

$$a, a_{m-1} . x^2 = b^2 . a, a_{m-1} + a_1, a_m,$$

und

$$46. \quad x^2 = b^2 + \frac{a_1, a_m}{a, a_{m-1}},$$

also ist x^2 eine ganze oder gebrochene Zahl, je nachdem $\frac{a_1, a_m}{a, a_{m-1}}$ das Eine oder das Andere ist.

110.

In dem besondern Falle, der hier betrachtet wird, gehen die Formeln (22.), (23.), und (24.) in folgende über:

$$45. \quad A = \alpha\gamma,$$

$$46. \quad \pm I = \gamma . a_1, a_m . a_1, a_{m-1} - \alpha . a, a_m . a, a_{m-1},$$

$$47. \quad \pm D = \alpha (a, a_m)^2 - \gamma . (a_1, a_m)^2.$$

Hier ist also I immer eine ganze Zahl; ferner, da das obere oder untere Zeichen genommen werden muſs, je nachdem $a, a_m . a_1, a_{m-1} - a, a_{m-1} . a_1, a_m$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ gröſser oder kleiner als $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ ist, so folgt sogleich, daſs D von Anfang an immer positiv ist.

Daſs auch I von Anfang an positiv ist, läſst sich am natürlichsten aus folgendem allgemeinen Satze beweisen. Wenn irgend ein Ausdruck P in einen Kettenbruch, dessen Theilzähler alle $= 1$ sind, verwandelt wird, und es bedeuten $\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}}$ und $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe desselben, so ist P^2 gröſser oder kleiner als $\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} \times \frac{a, a_m}{a_1, a_m}$, je nachdem $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ gröſser oder kleiner als $\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}}$, d. h. je nachdem

$$a, a_m . a_1, a_{m-1} - a_1, a_m . a . a_{m-1} = +1 \text{ oder } = -1$$

ist. Denn im ersten Falle hat man $\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} = \frac{a, a_m}{a_1, a_m} - \frac{1}{a_1, a_m . a_1, a_{m-1}}$, also

$$\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} \times \frac{a, a_m}{a_1, a_m} = \left(\frac{a, a_m}{a_1, a_m}\right)^2 - \frac{a, a_m}{a_1, a_m} \cdot \frac{1}{a_1, a_m \cdot a_1, a_{m-1}};$$

setzt man nun P $\left(\text{welches kleiner als } \frac{a, a_m}{a_1, a_m} \text{ ist}\right) = \frac{a, a_m}{a_1, a_m} - q$, so ist $q < \frac{1}{2(a_1, a_{m-1} \cdot a_1, a_m)}$ (§. 15.), folglich

$$P^2 = \left(\frac{a, a_m}{a_1, a_m} - q\right)^2 = \left(\frac{a, a_m}{a_1, a_m}\right)^2 - \frac{2a, a_m}{a_1, a_m} \cdot q + q^2 > \frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} \times \frac{a, a_m}{a_1, a_m}.$$

Im zweiten Falle liegt $\frac{1}{P}$ zwischen den Näherungswerthen $\frac{a_1, a_{m-1}}{a, a_{m-1}}$ und $\frac{a_1, a_m}{a, a_m}$, und ist kleiner als der letztere; folglich ist

$$\left(\frac{1}{P}\right)^2 > \frac{a_1, a_{m-1}}{a, a_{m-1}} \cdot \frac{a_1, a_m}{a, a_m}, \quad \text{oder} \quad P^2 < \frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} \cdot \frac{a, a_m}{a_1, a_m}.$$

Da nun hier $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ zwischen $\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}}$ und $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ liegt, so ist auch $\frac{\gamma}{\alpha} \gtrless \frac{a, a_m \cdot a\ a_{m-1}}{a_1, a_m \cdot a_1, a_{m-1}}$, je nachdem

$$a, a_m \cdot a_1, a_{m-1} - a_1, a_m \cdot a, a_{m-1} = +1$$

oder $= -1$ ist, also in jedem Falle I positiv. Auch ist $I_1^2 = A - DD_1'$ (Form. 29.), also I immer kleiner, als $\sqrt{A}$, und weil $a_{m+1} \cdot D = I + I_1$ (Form. 29.), auch D immer kleiner, als $2\sqrt{A}$.

111.

Hat man außer $\beta = 0$ auch noch $\alpha = 1$, so daß die Gleichung (1.) in

$$x^2 - y = 0$$

übergeht, und $x = \sqrt{\gamma} = \sqrt{A}$ ist, so sei die größte in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl $= b_1$, also der letzte in der Periode enthaltene Theilnenner $= 2b$; setzt man daher in dem Ausdrucke $a_{m+1} \cdot D = I + I_1$ statt α_{m+1} den Werth $2b$, so hat man $2b = \frac{I + I_1}{D}$; nun können I, I_1 höchstens nur $= b$ sein, also muſs das entsprechende $D = 1$, und $I = b$, $I_1 = b$ sein. Die Formel (47.) giebt daher für diesen Fall $\pm 1 = (a, a_m)^2 - \gamma(a_1, a_m)^2$, wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muſs, je nachdem $\frac{a, a_m}{a_1, a_m} \gtrless \sqrt{\gamma}$ ist. Da der Theilnenner $2b$ unendlich oft wiederkehrt, so muſs auch D unendlich oft $= 1$ werden, und es giebt daher unendlich viele Näherungswerthe $\frac{a, a_s}{a_1, a_s}$, die so beschaffen sind, daſs $\pm 1 = (a, a_s)^2 - \gamma(a_1, a_s)^2$ ist. Drückt man übrigens den Werth von $\sqrt{\gamma}$ durch

$$F(a + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_{m+1} + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_{m+1} \text{ etc.})$$

aus, wo $a=b$, $a_{m+1}=2b$ ist, und enthält die Periode $a, \ldots a_{m+1}$ eine gerade Anzahl von Theilnennern, so nimmt $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ eine gerade Stelle in der Reihe der Näherungswerthe ein, und ist daher größer als $\sqrt{\gamma}$, und dasselbe ist bei allen folgenden Näherungswerthen, die dem Theilnenner $2b$ vorausgehen, der Fall; alsdann muſs immer das obere Zeichen genommen werden. Ist dagegen die Anzahl der in der Periode enthaltenen Theilnenner ungerade, so nehmen die in Betrachtung kommenden Näherungswerthe abwechselnd eine ungerade oder gerade Stelle ein, und in diesem Falle muſs abwechselnd das untere oder das obere Zeichen genommen werden.

112.

Die eben vorgetragenen Lehren finden eine nicht ganz uninteressante Anwendung in der Auflösung der Gleichungen des 3ten Grades. Löst man eine solche Gleichung nach der Cardanischen Regel auf, so erhält man bekanntlich den Werth der Wurzel x unter der Form

$$x=\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}.$$

Ist nun x eine ganze Zahl, so muſs $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}=x\pm\sqrt{y}$ sein, wo x, y rationale Zahlen bedeuten. Die Regel, welche man gewöhnlich giebt, um aus $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}$ den gleichgeltenden Ausdruck $z\pm\sqrt{y}$ zu finden, führt, wie man weiſs, wieder auf die Aufgabe zurück, eine Cubische Gleichung aufzulösen. Dagegen kann dieser Ausdruck leicht auf folgende Weise gefunden werden. Man entwickele den numerischen Werth von $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$ näherungsweise, und verwandle diesen Werth in einen Kettenbruch, der nur positive Theilnenner hat, und dessen Theilzähler alle $=1$ sind: ist dieser Ausdruck wirklich die Wurzel einer quadratischen Gleichung, so muſs der Kettenbruch periodisch sein, und man kann alsdann aus diesem Kettenbruche den Werth von $z\pm\sqrt{y}$ finden. Es sei z. B. die Gleichung $x^3_3-bx-40=0$ gegeben, so hat man $x=\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}+\sqrt[3]{(20-\sqrt{392})}$; berechnet man den Werth von $\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}$, so findet man dafür $3{,}41421 \ldots$; verwandelt man nun diesen Ausdruck nach (86.) in einen Kettenbruch, so findet man

$$3{,}41421\ldots=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+}}}}.$$

Vorausgesetzt, daſs alle folgenden Theilnenner ebenfalls $=2$ sind, hat man $\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}=u=3+\frac{1}{2+u-3}$, woraus man $u=2+\sqrt{2}$ findet, was wirklich der Werth von $\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}$ ist, also

$$x=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$$

Es kann sich zuweilen ereignen, daſs ein Kettenbruch scheinbar periodisch ist, der bei fortgesetzter Berechnung sich nicht als solcher zeigen würde. Berechnet man aus dem als periodisch angenommenen Kettenbruche den Werth von $z+\sqrt{y}$, so muſs sich sogleich zeigen, ob dieser Ausdruck wirklich den Werth von $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$ angiebt. Auch könnte es sein, daſs sich der Ausdruck $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$ wirklich in einen anderen $z+\sqrt{y}$ verwandeln lieſse, während der Kettenbruch anscheinend nicht periodisch ist, weil man bei Entwickelung des Werthes von $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$, die Annäherung nicht weit genug getrieben hat. Die hierher gehörenden Bemerkungen können indessen um so eher weggelassen werden, da der Gebrauch der Cardanischen Regel so sehr beschränkt ist.

Siebentes Capitel.

Anwendung der Kettenbrüche auf die höhere Arithmetik.

Die Theorie der Kettenbrüche steht mit manchen Theilen der höheren Arithmetik, und namentlich mit der Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades, in genauer Verbindung. Soll jedoch ihre Anwendung auf diesen Theil der Mathematik in ihrem ganzen Umfange behandelt werden, so kann man nicht umhin eine Menge von Lehren aus der höheren Arithmetik selbst zu erörtern. Da dies aber hier nicht geschehen kann, so soll nur dasjenige hervorgehoben werden, was aus dem Vorhergehenden unmittelbar abgeleitet werden kann.

113.

Es soll die unbestimmte Gleichung

$$1.\quad ax - by = 1$$

aufgelöst werden, wo a, b und die unbekannten x, y ganze Zahlen sind. Die Zahlen a, b müssen nothwendig Primzahlen unter sich sein, denn wäre $a = m.t$, $b = n.t$, so würde die Gleichung

$$t(mx - ny) = 1$$

widersinnig sein. Man verwandele $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch, dessen Theilzähler alle $= 1$, dessen Theilnenner ganze positive Zahlen sind; ist $\frac{a_1}{b_1}$ der dem Bruche $\frac{a}{b}$ unmittelbar vorhergehende Näherungswerth, so hat man $ab_1 - a_1.b = \pm 1$. Gilt das obere Zeichen, so hat man unmittelbar $x = b_1$, $y = a_1$, oder allgemeiner

$$x = b_1 + bz,\quad y = a_1 + az,$$

wo z jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann. Gilt aber das untere Zeichen, so setze man $x = -b_1$, $y = -a_1$, oder allgemeiner

$$x = -b_1 + bz,\quad y = -a_1 + az.$$

Hieraus folgt unmittelbar de Möglichkeit, die Gleichung

$$2.\quad ax - by = c$$

aufzulösen, wo wieder a, b, c und die Unbekannten x, y ganze Zahlen bedeuten. Es wird vorausgesetzt, daſs a, b, c keinen gemeinschaftlichen Factor haben, weil man sonst die ganze Gleichung mit diesem dividiren

kann. Hiernach können auch a und b keinen gemeinschaftlichen Factor haben, weil dieser sonst nothwendig auch in c enthalten sein müfste. Man löse zuerst die Gleichung $at - bu = 1$ auf; es sei $t = \pm b_1$, $u = \pm a_1$, so sind

$$x = \pm b_1 c + bz, \quad y = \pm a_1 c + az$$

die allgemeinen Werthe, die der Gleichung (2.) Genüge thun *).

114.

Wenn die Gleichung $x^2 - Ay^2 = D_1$, wo x, y, A, D **) ganze Zahlen sind und $D < \sqrt{A}$ ist, wirklich auflösbar ist, so mufs $\frac{x}{y}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A}$ sein, wenn $\sqrt{A}$ nach §. 107. in einen Kettenbruch verwandelt wird; es wird hierbei vorausgesetzt, dafs x und y keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Denn man verwandle $\frac{x}{y}$ in einen Kettenbruch, es sei dieser $= F(a + 1 : a_1 + \ldots . + 1 : a_n)$, also $\frac{x}{y} = \frac{a, a_n}{a_1, a_n}$. Man setze für den Augenblick voraus, es sei $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ gröfser, als der vorhergehende Näherungswerth $\frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}}$; nun ist $\frac{a, a_n^2}{a_1, a_n^2} = A + \frac{D}{y^2}$, also $\frac{a, a_n}{a_1, a_n} > \sqrt{A}$, und (weil $D < \sqrt{A}$) $\frac{a, a_n}{a_1, a_n} < \sqrt{A} + \frac{1}{y^2}$; ferner ist

$$\frac{a, a_n}{a_1, a_n} - \frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}} = \frac{1}{a_1, a_n \,.\, a_1, a_{n-1}} > \frac{1}{y^2},$$

also $\left(\text{da } \frac{a, a_n}{a_1, a_n} - \sqrt{A} < \frac{1}{y^2}\right)$ $\frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}} < \sqrt{A}$, d. h. es liegt $\sqrt{A}$ zwischen $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ und $\frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}}$. Setzt man nun $I = A . a_1, a_m . a_1, a_{m-1} - a, a_m . a, a_{m-1}$, so ist I eine positive Zahl (§. 110.), und man hat

$$3. \quad \sqrt{A} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{A} + I}{D}}}}}.$$

Wäre $\frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}}$ gröfser, als $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$, so könnte man zwischen diesen Brüchen den Bruch $F(a + 1 : a_1 + \ldots . + 1 : a_n - 1) = \frac{s}{t}$ einschalten; alsdann ist

*) Diese Auflösungsmethode verdankt man Lagrange (*Mém. de l'ac. de Berlin* 1767). Der Aufsatz von Pezzi in *Memorie della societa italiana* T. 11. enthält durchaus nichts Neues.

**) Überhaupt sollen im Folgenden alle Buchstaben ganze Zahlen bedeuten.

$\frac{s}{t} < \frac{a, a_n}{a_1, a_n}$, und $\sqrt{A}$ zwischen $\frac{s}{t}$ und $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ enthalten, so daſs man wieder alle früheren Resultate erhält, wenn man nur statt $\frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}}$ überall $\frac{s}{t}$ setzt.

Soll daher die Gleichung $x^2 - Ay^2 = D$, unter der Voraussetzung, daſs $D < \sqrt{A}$ ist, aufgelöst werden, so braucht man nur $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln: findet sich alsdann unter den Werthen von z (§. 107. Form. 21.) einer, dessen Nenner D ist, so ist die Gleichung aufgelöst, wenn man den Näherungswerth $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ berechnet, zu welchem dieses z gehört, indem man $x = a, a_n$; $y = a_1, a_n$ setzt, vorausgesetzt, daſs $\frac{a, a_n}{a_1, a_n} > \sqrt{A}$ ist; im entgegengesetzten Falle wird durch diese Werthe die Gleichung $x^2 - Ay^2 = -D$ gelöst. Ist $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ nicht der Näherungswerth, der einem dem mittlern vorangehenden Theilnenner (§. 109.) entspricht, so kommt der Theilnenner a_{n+1}, und daher auch D in derselben Periode zweimal vor, und es wird alsdann, wenn der Näherungswerth $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$, der dem ersten D entspricht, der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -D$ Genüge leistet, der Näherungswerth $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$, der dem zweiten D entspricht, die Gleichung $x^2 - Ay^2 = D$ auflösen, wenn man $x = a, a_m$; $y = a_1, a_m$ setzt. (Vgl. §. 111.)

115.

Lagrange hat zuerst gezeigt, daſs durch Hülfe der Kettenbrüche die Gleichung

$$4. \quad x^2 - Ay^2 = 1$$

immer auflösbar ist, wenn A eine nicht quadratische Zahl bedeutet. Zu diesem Endzwecke verwandelt man $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch nach §. 111.; es sei

$$\sqrt{A} = F(a + 1 : a_1 + \ldots. + 1 : a_m + 1 : 2a + 1 : a_1 + \ldots. + 1 : a_m + 1 : 2a \text{ etc.}),$$

so hat man

$$(a, a_m)^2 - A(a_1, a_m)^2 = \pm 1;$$

gilt das obere Zeichen, so hat man sogleich $x = a, a_m$; $y = a_1, a_m$; gilt das untere, so ist x der Zähler, y der Nenner des Bruches

$$F(a + 1 : a_1 + \ldots. + 1 : a_m + 1 : 2a + 1 : a_1 + \ldots. + 1 : a_m \text{ etc.}) \text{ (vergl. §. 111.)}.$$

Die hier angegebenen Werthe sind zugleich die kleinsten, die der Gleichung (4.) Genüge leisten. Wir wollen dies nur für den ersten Fall beweisen, weil dasselbe für den zweiten gilt. Hätte man noch kleinere Werthe, als $x = a, a_m$; $y = a_1, a_m$, allenfalls $x = p$, $y = q$, so müſste $\frac{p}{q}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A}$ sein; es sei $\frac{p}{q} = \frac{a, a_n}{a_1, a_n}$, und es wäre

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{1}{a_1 + \vdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{A}+I}{1}}}};$$

aber aus den Gleichungen

$$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 = 1, \quad A.a_1, a_n.a_1, a_{n-1} - a, a_n.a, a_{n-1} = I$$

folgt, wenn man die erste mit a_1, a_{n-1}, die zweite mit a_1, a_n multiplicirt, und die Resultate addirt,

$$a_1, a_n.I + a_1, a_{n-1} = a, a_n, \quad \text{also} \quad I = \frac{a, a_n}{a_1, a_n} - \frac{a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n};$$

es ist aber $\frac{a, a_n}{a_1, a_n} = a + \frac{a_2, a_n}{a_1, a_n}$ (§. 3.), also $I = a + \frac{a_2, a_n - a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n}$; nun ist a_2, a_n und a_1, a_{n-1} jedes kleiner, als a_1, a_n, um so mehr $a_2, a_n - a_1, a_{n-1}$, es mufs daher $a_2, a_n = a_1, a_{n-1}$ sein, weil sonst I ein Bruch wäre: folglich ist $I = a$, und $\frac{\sqrt{A}+I}{1}$ würde den Theilnenner $2a$ geben, d. h. die Periode würde bei a_n endigen, gegen die Voraussetzung.

Schon §. 111. wurde bemerkt, dafs es unendlich viele Werthe giebt, die der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ Genüge leisten, und aus (114.) folgt, dafs überhaupt alle Werthe, die diese Gleichung auflösen, aus den Näherungswerthen von $\sqrt{A}$ gefunden werden. Man braucht aber diese Näherungswerthe nicht besonders zu berechnen, sondern sobald $x = a, a_m$; $y = a_1, a_m$ gefunden ist, so kann man die andern Werthe von x, y daraus ableiten. Man setze nemlich

$$\left.\begin{array}{ll} 5. & a, a_m + a_1, a_m\sqrt{A})^n = x + y\sqrt{A} \\ 6. & a, a_m - a_1, a_m\sqrt{A})^n = x - y\sqrt{A} \end{array}\right\}, \text{ wo } n \text{ irgend eine ganze Zahl}$$

bedeutet, so erhält man, wenn man (5.) mit (6.) multiplicirt,

$$[(a, a_m)^2 - A(a_1, a_m)^2]^n = x^2 - Ay^2 = 1,$$

wie verlangt wurde. Die Werthe von x und y findet man bequemer durch die Formeln

$$7. \quad x = \frac{(a, a_m + a_1, a_m\sqrt{A})^n + (a, a_m - a_1, a_m\sqrt{A})^n}{2} \text{ *)},$$

$$8. \quad y = \frac{(a, a_m + a_1, a_m\sqrt{A})^n - (a, a_m - a_1, a_m\sqrt{A})^n}{2\sqrt{A}}.$$

Man bezeichne die Werthe von x und y, die dem Exponenten n entspre-

---

*) *Hist. de l'acad. de Berlin an.* 1767.

chen, durch x_n, y_n; sobald nun zwei Werthe x_{n-1}, y_{n-1} und x_n, y_n gegeben sind, so kann man daraus den Werth von x_{n+1}, y_{n+1} finden. Denn es ist

$$x_{n+1} = \frac{(a, a_m + a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}((a, a_m)^2 + 2a, a_m \cdot a_1, a_m \sqrt{A} + A(a_1, a_m)^2)}{2}$$
$$+ \frac{(a, a_m - a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}((a, a_m)^2 - 2a, a_m \cdot a_1, a_m \sqrt{A} + A(a_1, a_m)^2)}{2};$$

es ist aber auch

$$x_n \cdot 2x_1 = \frac{(a, a_m + a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}(2(a, a_m)^2 + 2a, a_m \cdot a_1, a_m \sqrt{A})}{2}$$
$$+ \frac{(a, a_m - a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}(2(a, a_m)^2 - 2a, a_m \cdot a_1, a_m \sqrt{A})}{2};$$

nun ist $A(a_1, a_m)^2 = (a, a_m)^2 - 1$; substituirt man diesen Werth in dem Werthe von x_{n+1}, so findet man

$$x_{n+1} = \frac{(a, a_m + a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}(2(a, a_m)^2 + 2a, a_m \cdot a_1, a_m \sqrt{A} - 1)}{2}$$
$$+ \frac{(a, a_m - a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}(2(a, a_m)^2 - 2a, a_m \cdot a_1, a_m \sqrt{A} - 1)}{2} = x_n \cdot 2x_1 - x_{n-1},$$

und eben so findet man $y_{n+1} = y_n \cdot 2y_1 - y_{n-1}$. Die Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots$, und eben so die Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots$ bilden daher eine recurrirende Reihe, deren Beziehungsscale $2x_1, -1$ ist. Dafs die Formeln (7.) und (8) keine Werthe liefern können, die nicht in den Näherungswerthen von $\sqrt{A}$ enthalten sind, ist klar; es mufs nur noch bewiesen werden, dafs die Formeln (7.) und (8.) alle möglichen Werthe von x und y geben. Man nehme an, es entsprächen die Werthe $\frac{x_n}{y_n}$, $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ bezüglich den Näherungswerthen $\frac{a, a_r}{a_1, a_r}$, $\frac{a, a_s}{a_1, a_s}$, und es lägen zwischen diesen Näherungswerthen noch andere, die der Gleichung (4.) Genüge leisten. Sei die auf $\frac{a, a_r}{a_1, a_r}$ zunächst folgende $= \frac{a, a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1}}$, und zwar

$$a_{r+1} = 2a;\ a_{r+2} = a_1;\ a_{r+3} = a_2;\ \ldots\ a_{r+m+1} = a_m.$$

Nach §. 9. Formel (*F.*) ist

$$\frac{a, a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1}} - \frac{a, a_r}{a_1, a_r} = \frac{a, a_{r+m+1} \cdot a_1, a_r - a_1, a_{r+m+1} \cdot a, a_r}{a_1, a_r} = \frac{a_{r+2} \cdot a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1} \cdot a_1, a_r}$$
$$= \frac{a_1, a_m}{a_1, a_{r+m+1} \cdot a_1, a_r}.$$

Man findet aber leicht, wenn man statt x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}, ihre Werthe aus Formel (7.) und (8.) substituirt, dafs $x_n \cdot y_{n+1} - x_{n+1} \cdot y_n = a_1, a_m$ ist, also $\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{a_1, a_m}{a_1, a_r \cdot a_1, a_s}$; nun ist $a_1, a_s > a_1, a_{r+m+1}$: es wäre also

$\frac{a, a_r}{a_1, a_r} - \frac{a, a_s}{a_1, a_s} < \frac{a, a_r}{a_1, a_r} - \frac{a, a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1}}$ gegen die Voraussetzung, da ja $\frac{a, a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1}}$ zwischen $\frac{a, a_r}{a_1, a_r}$ und $\frac{a, a_s}{a_1, a_s}$ liegen soll.

Man bemerke noch Folgendes: Da alle Theilnenner des Kettenbruchs, der den Werth von $\sqrt{A}$ angiebt, die gröſste Zahl sind, die in einem Ausdrucke von der Form $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ enthalten ist, aber erst das D, welches dem letzten Theilnenner $2a$ der Periode entspricht, $=1$ ist, jedes vorhergehende dagegen $\overline{\overline{>}}2$ sein muſs, und I nicht gröſser als a sein kann, so folgt daraus, daſs alle Theilnenner, die in der Periode enthalten sind (den letzten $2a$ ausgenommen), $=a$ oder $<a$ sein müssen.

116.

Das Aufsuchen der kleinsten Werthe, die der Gleichung (4.) Genüge leisten, führt oft zu sehr beschwerlichen Rechnungen: so z. B. hat, wenn $A=331$ ist, die Periode des Kettenbruchs, der den Werth von $\sqrt{A}$ angiebt, 34 Theilnenner. Eine Abkürzung des gewöhnlichen Verfahrens scheint aber ganz besonders von der Auflösung einer an und für sich sehr interessanten Frage abzuhängen, nemlich: ob man nicht, wenn eine Zahl A gegeben ist, aus derselben alle Theilnener des entsprechenden Kettenbruchs durch eine allgemeine Formel ableiten kann. Die Lösung dieser Frage, die bis jetzt die Mathematiker wenig beschäftigt zu haben scheint, scheint um so eher möglich zu sein, da man wirklich für gewisse einzelne Fälle den Zusammenhang zwischen A und den Theilnennern nachweisen kann. Einige solche Fälle haben schon früher Euler *), Kausler **) und Degen ***) gegeben; sie lassen sich aber sehr vermehren. Ich habe in der folgenden Tabelle nur eine Anzahl von Formeln zusammengestellt, in welcher die Anzahl der Theilnenner nicht sehr groſs ist; sie enthalten die meisten der früher bekannten als einzelne Fälle. Hierbei ist folgende Abkürzung angewandt worden: Da dieselben Theilnenner in der Periode in umgekehrter Ordnung wiederkehren, so sind die Theilnenner überhaupt nur bis zum mittleren Theilnenner, wenn ein solcher vorhanden war, angegeben, dieser aber in Klammern eingeschlossen worden (§. 109). War kein solcher mittlerer Theilnenner vorhanden, so sind die zwei mittelsten und einander gleichen Theilnenner in Klammern eingeschlossen worden. Findet man also z. B. bei Formel [6] die Theilnenner $n, 1, (n-1)$ angegeben, so heiſst dies, daſs die Periode aus den Theilnennern $1, n-1, 1, 2n$ besteht.

---

*) *Novi comment. acad. Petr. T. 11. pg. 46.*

**) *Mém. de l'ac. de Petersb. T. 2. pg. 95. sqq.*

***) *Canon Pellianus pg. XVII.*

	Ist die Zahl A	so sind die Theilnenner
[1]	$=m^2n^2+m$	$=mn, (2n)$
[2]	$=m^2n^2+2m$	$=mn, (n)$
[3]	$=m^2n^2+2mn$	$=mn, (1)$
[4]	$=m^2(n+2)^2-2m$	$=m(n+2)-1, 1, (2n-1)$
[5]	$=mn+m-1)^2+2(mn+m-1)-n$	$=m(n+1)-1, 1, (2(m-1))$
[6]	$=n^2+2n-1$	$=n, 1, (n-1)$
[7]	$=(2n+3)^2+(4n+3)$	$=2n+3, 1, (n)$
[8]	$=(2m+1)^2.n^2-2n$	$=(2m+1)n-1, 1, (2m-1)$
[9]	$=[(m^2+m)n-(1+2m)]^2+(1+2m)n-4$	$=(m^2+m)n-(1+2m), m, (2)$
[10]	$=(6n-1)^2+4n-1$	$=(6n-1), 3, (3n-1)$
[11]	$=(5n+2)^2+5n+1$	$=5n+2, 2, (2n)$
[12]	$=(15n-2)^2+8n-1$	$=15n-2, 3, (1)$
[13]	$=(3n+1)^2+3n+2$	$=3n+1, 1, 1, (2n)$
[14]	$=(3n+1)^2+2n+1$	$=3n+1, 2, 1, (3n)$
[15]	$=(3n+1)^2+4n+2$	$=3n+1, 1, 2, 3n+1$
[16]	$=4n^2+4n-3$	$=2n, 1, n-1, (2)$
[17]	$=(15n-7)^2+11n-5$	$=15n-7, 2, 1, (2)$
[18]	$=(10n-3)^2+4n-1$	$=10n-3, 4, 1, (5n-3)$
[19]	$=36n^2-17n+2=(4n-1)(9n-2)$	$=6n-2, 1, 1, (2)$
[20]	$=(9n+2)^2+8n+2$	$=9n+2, 2, 4, (9n+2)$
[21]	$=(10n-3)^2+11n+3$	$=10n-3, 1, 1, (4)$
[22]	$=(20m+8)^2+31m+13=(16m+7)(25m+11)$	$=20m+8, 1, 3, (2)$
[23]	$=(7n-2)^2+8n-2$	$=7n-2, 1, 1, 3, (7n-2)$
[24]	$=(17n-3)^2+12n-2$	$=17n-3, 2, 1, 5, (17n-3)$
[25]	$=(7n+1)^2+6n+1$	$=7n+1, 2, 2, 1, (7n)$
[26]	$=(6n+2)^2+4n+1$	$=6n+2, 3, 3n, 1, (4)$
[27]	$=(4n+2)^2+8$	$=4n+2, n, 1, 1, (2n)$
[28]	$=(9n+3)^2+18$	$=9n+3, n, 2, 1, 2n, (9n+3)$
[29]	$=(9n-3)^2+10n-3$	$=9n-3, 1, 1, 3, 1, (9n-4)$
[30]	$=(12n-4)^2+16n-4$	$=12n-4, 1, 2, 3n-2, 1, 5, (6n-2)$
[31]	$=(12n+3)^2+3n+3$	$=12n+3, 2, 1, 3n, 5, 1, (6n)$
[32]	$=(6n+8)^2+12n+5$	$=6n+8, 1, n, 2, 3n+3, 1, (4n+4)$
[33]	$=(4n+1)^2+(3n+1)^2$	$=5n+1, (2, 2)$
[34]	$=(15n+2)^2+(8n+1)^2$	$=17n+2, (4, 4)$
[35]	$=(2n+1)^2+2^2$	$=2n+1, n, (1, 1)$
[36]	$=(4n-1)^2+(3n-1)^2$	$=5n-2, 1, (1, 1)$
[37]	$=(15n-2)^2+(8n-1)^2$	$=17n-3, 1, (3, 3)$
[38]	$=(12n-7)^2+(5n-3)^2$	$=13n-8, 2, (1, 1)$
[39]	$=(20n+1)^2+(21n+1)^2$	$=29n+1, 2, (2, 2)$
[40]	$=(12n-5)^2+(5n-2)^2$	$=13n-6, 1, 1, (1, 1)$
[41]	$=(6n+1)^2+(8n+2)^2$	$=10n+2, 4, 1, 5n, (3, 3)$
[42]	$=(6n-1)^2+(8n-2)^2$	$=10n-3, 1, 4, 5n-2, 1, (2, 2)$

Diese Formeln, die sich noch in's Unendliche vermehren liefsen, können mit gutem Nutzen gebraucht werden, wenn man Tafeln berechnen will, die für jedes A die kleinsten Werthe von x und y angeben, welche der Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ Genüge leisten. Sie geben übrigens zu eben so viel einzelnen Theoremen über diese Werthe Veranlassung. So z. B. kann man sagen, wenn $A = n^2 + 2n - 1$ ist, so sind die geringsten Werthe von x und y, die der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ Genüge leisten, nach [6], Zähler und Nenner des Bruches $\frac{n(n+2)}{n+1}$, d. h. $x = n(n+2)$, $y = n+1$. Einzelne Formeln können auch bei der Untersuchung über die Zerfällung der Zahlen in Factoren dienen. Ist z. B. die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene Zahl $6n-2$, und die Periode des entsprechenden Kettenbruchs

$$= 1, 1, 2, 1, 1, 2, (6n-2),$$

so ist nach [19] die Zahl A nothwendig ein Product aus den Factoren $(4n-1)(9n-2)$; einen ähnlichen Satz würde [22] geben. So lange jedoch diese Formeln noch vereinzelt sind, können sie nur einen sehr untergeordneten Werth haben.

116.

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ ist nach §. 111. und 114. nur und immer auflösbar, wenn die Periode eine ungerade Anzahl von Theilnennern enthält, d. h. wenn sie keinen mittleren Theilnenner hat. Es ist daher interessant, zu untersuchen, wie die Zahl A beschaffen sein mufs, damit diese Gleichung wirklich aufgelöst werden kann. Man nehme an, es sei a die gröfste ganze in $\sqrt{A}$ enthaltene Zahl, und die Periode bestehe aus den Gliedern

$$a_1, a_2, \ldots . a_n, a_n, \ldots . a_2, a_1, 2a,$$

so ist

$$\sqrt{A} = a + \frac{1}{a_1 +} \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_n +}} \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{2a + \sqrt{A} - a}} = a + \frac{1}{a_1 +} \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_n +}} \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\sqrt{A} + a}} \quad \text{(§. 14. Form. 8.).}$$

Man setze nun

$$\frac{M}{N} = a_n + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\sqrt{A} + a}} = \frac{(\sqrt{A}+a)(a_n, a_1) + (a_n, a_2)}{(\sqrt{A}+a)(a_{n-1}, a_1) + (a_{n-1}, a_2)},$$

so ist

$$\sqrt{A} = + \frac{\frac{M}{N}(a_2, a_n) + a_2, a_{n-1}}{\frac{M}{N}(a_1, a_n) + a_1, a_{n-1}}.$$

Hieraus findet man nach gehöriger Reduction

9. $$A = \frac{[a(a_1, a_n) + a_2, a_n]^2 + [a(a_1, a_{n-1}) + a_2, a_{n-1}]^2}{(a_1, a_n)^2 + (a_1, a_{n-1})^2} = \frac{(a, a_n)^2 + (a, a_{n-1})^2}{(a_1, a_n)^2 + (a_1, a_{n-1})^2},$$

oder

10. $$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 = -[(a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2].$$

Nimmt man nun an, dafs

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I_1}{D_1}$$

bezüglich die Werthe von z sind, die den Näherungswerthen $\frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}}$, $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ entsprechen (§. 107. Form. 21.), so ist

$$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 = \pm D_1,$$
$$(a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2 = \pm D,$$

folglich

$$D_1 = D,$$

aber auch

$$A = I_1^2 + DD_1 \text{ (§. 107. Form. 29.)}$$

also

11. $$A = I_1^2 + D_1^2.$$

Die Zahlen I_1 und D_1 können keinen gemeinschaftlichen Factor haben, denn hätten sie einen solchen, so müfste er nach (11.) auch ein Factor von A sein; hieraus würde folgen, dafs er auch ein Factor von a, a_n ist, da man $(a, a_n)^2 = \pm D_1 + A(a_1, a_n)^2$ hat, und eben so würde folgen, dafs er auch ein Factor von a, a_{n-1} ist; es müfsten also a, a_n und a, a_{n-1} einen gemeinschaftlichen Factor haben, was nicht möglich ist, da sie Zähler und Nenner des Kettenbruchs

$$F(a_n + 1 : a_{n-1} + \ldots + 1 : a)$$

sind (§. 10.).

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ kann daher nur dann statt finden, wenn sich A in zwei Quadrate zerlegen läfst, deren Wurzeln Primzahlen zu einander sind; es mufs daher A entweder $= (2t)^2 + (2u+1)^2$ oder

$= (2t+1)^2 + (2u+1)^2$ sein, d. h. die Gleichung hat keine Auflösung, wenn A in der Form $4n$ oder in der Form $4n+3$ enthalten ist.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daſs auch y die Summe zweier Quadrate ist, deren Wurzeln Primzahlen zu einander sind. Da nemlich y der Nenner des Kettenbruchs

$$F(a+1:a_1+\ldots\ldots+1:a_n+1:a_n+\ldots\ldots+1:a_1)$$

ist, so findet man $y = (a_1, a_n)^2 + (a_1, a_{n-1})^2$; aber a_1, a_n und a_1, a_{n-1} sind Zähler und Nenner des Kettenbruchs $F(a_n+1:a_{n-1}+\ldots\ldots+1:a_1)$, und haben daher keinen gemeinschaftlichen Factor.

117.

Hat die Periode einen mittleren Theilnenner, so daſs sie aus den Gliedern

$$a_1, a_n, \ldots\ldots a_n, a_{n+1}, a_n \ldots\ldots a_2, a_1$$

besteht, und ist a die gröſste in $\sqrt{A}$ enthaltene Zahl, $\frac{p}{q}$ der erste Näherungswerth, der der Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

Genüge leistet, so ist

$$\frac{p}{q} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{\frac{a_1, a_n}{a_1, a_{n-1}}}}}} = \frac{\left(a_{n+1} + \frac{a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n}\right) a, a_n + a, a_{n-1}}{\left(a_{n+1} + \frac{a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n}\right) a_1, a_n + a_1, a_{n-1}}.$$

Hieraus findet man

$$p = a, a_n(a_{n+1}.a_1, a_n + 2a_1, a_{n-1}) + a, a_{n-1}.a_1, a_n - a, a_n.a_1, a_{n-1},$$
$$q = a_1, a_n(a_{n+1}.a_1, a_n + 2a_1, a_{n-1}).$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung

$$p^2 - Aq^2 = 1 = (a, a_{n-1}.a_1, a_n - a, a_n.a_1, a_{n-1})^2,$$

so erhält man

$$[(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2](a_{n+1}.a_1, a_n + 2a_1, a_{n-1}) = \pm 2a, a_n;$$

nun ist aber auch

$$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 = \pm D\ ^{*}),$$

folglich

$$12.\quad a_{n+1}.a_1, a_n + 2a_1, a_{n-1} = \frac{2a, a_n}{D},$$

d. h. D ist ein Factor von $2a, a_n$.

---

*) Wenn nemlich $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ der Werth von z ist, aus dem man a_{n+1} findet.

Die Zahlen a, a_n und a_1, a_n haben keinen gemeinschaftlichen Factor; ist daher D eine ungerade Zahl (und mithin ein Factor von a, a_n), so folgt

$$13.\quad \frac{(a, a_n)^2}{D} - \frac{A(a_1, a_n)^2}{D} = \pm 1,$$

D mufs also auch ein Factor von A sein. Es sei $a, a_n = k.D$, $A = l.D$, so folgt aus (13.)

$$14.\quad l(a_1, a_n)^2 - D.k^2 = \mp 1.$$

Ist D eine gerade Zahl $= 2E$, so ist E ein Factor von a, a_n; die Gleichung (12.) geht daher in folgende über:

$$15.\quad \frac{(a, a_n)^2}{E} - \frac{A(a_1, a_n)^2}{E} = \pm 2;$$

es mufs hier wieder E ein Factor von A sein; setzt man $a, a_n = k.E$, $A = l.E$, so hat man

$$16.\quad l(a_1, a_n)^2 - E.k^2 = \pm 2.$$

Ist A eine Primzahl von der Form $4n+1$, so mufs $l=1$ und $A=D$ sein, wenn D eine ungerade Zahl ist; die Gleichung (14.) geht alsdann in folgende über:

$$17.\quad (a_1, a_n)^2 - A.k^2 = \mp 1.$$

Diese Gleichung kann aber nicht statt haben, man möge das obere oder untere Zeichen nehmen; denn im ersten Falle würde die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = -1$$

eine Auflösung haben, was nicht möglich ist, da der Kettenbruch einen mittleren Theilnenner hat; im zweiten Falle würde die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = 1,$$

durch Werthe von x und y aufgelöst werden, die kleiner als p und q sind, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Aus Gleichung (16.) würde folgen

$$18.\quad (a_1, a_n)^2 - Ak^2 = \pm 2,$$

wenn $A = E$ und folglich $l = 1$ wäre; diese Annahme ist aber unmöglich, weil sonst $D = 2A$, also $D > 2\sqrt{A}$ wäre, gegen §. 110. Es müfste folglich $E=1$, $A=l$ sein, und es würde daher aus Gleichung (16.) die Gleichung

$$19.\quad k^2 - A(a_1, a_n)^2 = \pm 2$$

folgen. Sind aber k und a_1, a_n beide gerade Zahlen, so sind ihre Quadrate in der Form $4m$ enthalten: es müfste daher $k^2 - A(a_1, a_n)^2$ durch 4 theilbar sein. Ist k eine gerade, a_1, a_n eine ungerade Zahl, so ist k^2 in der Form $4m$, $(a_1, a_n)^2$ in der Form $4m+1$ enthalten: es ist also auch $A(a_1, a_n)^2$ in der Form $4m+1$ enthalten, und daher kann $k^2 - A(a_1, a_m)^2$

nicht durch 2 theilbar sein. Ist endlich a_1, a_n und k ungerade, so ist sowohl k^2 als auch $(a_1, a_n)^2$ in der Form $4m+1$ enthalten, daher mufs $k^2 - A(a_1, a_m)^2$ durch 4 theilbar sein. Es kann daher unter der Voraussetzung, dafs A eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist, weder die Gleichung (17.) noch die Gleichung (19.) statt haben, d. h. es kann überhaupt eine solche Zahl nicht so beschaffen sein, dafs die Periode des ihrer Quadratwurzel entsprechenden Kettenbruchs einen mittleren Theilnenner enthielte; es ist daher für eine solche Zahl immer möglich, die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = -1$$

zu lösen, und sie besteht aus der Summe zweier Quadrate, deren Werth man jedesmal durch die Entwickelung des Kettenbruchs finden kann; es ist nemlich

$$A = I_1^2 + D_1^2,$$

wo I_1 und D_1 die in §. 116. bezeichneten Werthe haben. Die Natur der Zahlen I_1 und D_1 kann noch genauer bestimmt werden. Es ist klar, dafs eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade sein mufs: es ist aber immer I_1 gerade, D_1 ungerade. Denn in §. 116. wurden die zwei Gleichungen

$$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 = \pm D_1, \qquad (a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2 = \mp D_1$$

gefunden; da nun $a, a_n . a_1, a_{n-1} - a_1, a_n . a, a_{n-1} = \pm 1$ ist, so können die Zahlen $a, a_n;\ a_1, a_n;\ a, a_{n-1};\ a_1, a_{n-1}$ weder alle gerade noch alle ungerade sein; es müssen vielmehr entweder drei ungerade und eine gerade sein, oder es müssen von den Zahlen $a, a_n;\ a_1, a_{n-1};\ a, a_{n-1};\ a_1, a_n$ entweder nur die zwei ersten, oder nur die zwei letzten gerade sein. Die Voraussetzung, dafs drei Zahlen ungerade sind, eine gerade, ist aber unstatthaft, weil sonst von den zwei Ausdrücken

$$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 \text{ und } (a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2$$

einer einer geraden, der andere einer ungeraden Zahl entspräche. Es mufs daher nothwendig eine der zwei Zahlen a, a_n und a_1, a_n gerade, die andere ungerade sein, und dasselbe gilt von den zwei Zahlen a, a_{n-1} und a_1, a_{n-1}. Mithin ist $(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2$ und $(a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2$, also auch D_1 eine ungerade Zahl, und I_1 eine gerade *).

118.

Ist A eine Primzahl von der Form $4m+3$, so mufs der $\sqrt{A}$ entsprechende Kettenbruch eine Periode mit mittlerem Theilnenner haben

*) Dies hat zuerst *Graufs* auf anderem Wege gefunden. *Disq. arith. art.* 265.

(116.). Da nun die Gleichung (17.) auch für diesen Fall nicht statt haben kann, so mufs die Gleichung (19.) gelten, also $D=2$ sein. Ist A von der Form $8m+3$, so kann nur die Gleichung

$$k^2-A(a_1, a_n)^2 = -2,$$

ist dagegen $A=8m+7$, nur die Gleichung

$$k^2-A(a_1, a_n)^2 = 2$$

realisirt werden. Denn es ist einleuchtend, dafs in jedem Falle die Zahlen k und a_1, a_n ungerade, also ihre Quadrate in der Form $8m+1$ enthalten sein müssen. Ist $A=8m+3$, so kann nicht $k^2-2=A(a_1, a_n)^2$, d. h. $8m+1-2=(8m+3)(8m+1)$ sein, und ist $A=8m+7$, so kann nicht $k^2+2=A(a_1, a_n)^2$, d. h. $8m+1+2=(8m+7)(8m+1)$ sein. Da $a, a_n = kE$ und $E=1$ ist, so hat man, wenn A in der Form $8m+3$ enthalten ist,

$$(a, a_n)^2-A(a_1, a_n)^2 = -2;$$

ist dagegen A in der Form $8m+7$ enthalten, so hat man

$$(a, a_n)^2-A(a_1, a_n)^2 = 2,$$

d. h. je nachdem A eine Primzahl von der Form $8m+3$ oder $8m+7$ ist, wird der mittlere Theilnenner a_{n+1} eine gerade oder ungerade Stelle einnehmen, weil, je nachdem das Eine oder das Andere der Fall ist, $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ kleiner oder gröfser als $\sqrt{A}$ sein, und daher a_n eine ungerade oder gerade Stelle einnehmen mufs.

Sobald A eine Primzahl ist, so kann nur in dem Werthe des Ausdrucks $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$, aus welchem sich der Theilnenner a_{n+1} ergiebt, $D=2$ sein: denn fände sich ein anderer Ausdruck $\frac{\sqrt{A}+I_1}{2}$, der einem anderen Theilnenner entspräche, so würde sowohl die Gleichung $x^2-Ay^2=2$ als $x^2-Ay^2=-2$ aufgelöst werden können, was, wie so eben bewiesen wurde, unmöglich ist (vergl. §. 114.). Übrigens hängt der Beweis des Satzes, dafs die Gleichung $x^2-Ay=-2$, und die Gleichung $x^2-Ay^2=2$ bezüglich nicht für die Zahlen $A=8m+7$, $A=8m+3$ statt haben kann, nicht von dem Umstande ab, dafs diese Zahlen Primzahlen sind, sondern gilt auch für alle übrigen.

Das Vorstehende bietet ein neues Hülfsmittel dar, die Primzahlen von der Form $4n+3$ von den zusammengesetzten Zahlen in vielen Fällen zu unterscheiden. Ist nemlich eine Zahl $A=4n+3$ gegeben, so

entwickele man den dem Werthe $\sqrt{A}$ entsprechenden Kettenbruch. Ist alsdann in dem Ausdrucke $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$, aus welchem man den mittleren Theilnenner findet, D nicht $=2$, so ist man sicher, daſs A keine Primzahl ist, wiewohl umgekehrt $D=2$ und A dennoch eine zusammengesetzte Zahl sein kann. Sobald A eine ungerade Zahl und $D=2$ ist, so ist der mittlere Theilnenner $a_{n+1}=a$ oder $=a-1$, je nachdem a eine ungerade oder gerade Zahl ist. Denn aus der allgemeinen Gleichung

$$A=I_1^2+DD_1 \quad (\S. 107., 29.)$$

folgt im vorliegenden Falle, wo $D_1=2$ ist,

$$I_1^2=A-2D,$$

oder

$$I_1^2>A-4,$$

und, wenn man $A=a^2+m$ setzt,

$$I_1^2>a^2+m-4,$$

mithin

$$I_1>a-2;$$

da aber zugleich I_1 nicht gröſser als a sein kann, so kann es nur $=a$ oder $=a-1$ sein. Ferner muſs I_1 eine ungerade Zahl sein, weil A ungerade und $A=I_1^2+DD_1$ ist, folglich $I_1=a$ oder $=a-1$, je nachdem a ungerade oder gerade ist; da aber a_{n+1} die gröſste in $\frac{a+I_1}{2}$ enthaltene Zahl ist, so folgt $a_{n+1}=I_1$. Man kann daher auch sagen: wenn A eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, so muſs der mittlere Theilnenner $=a$ oder $=a-1$ sein, je nachdem a ungerade oder gerade ist.

Für den Werth $D=2$ folgt (aus §. 117. Formel 12.):

$$a_{n+1}=\frac{a, a_n-2a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n};$$

nun ist

$$a, a_n=a.a_1, a_n+a_2, a_n,$$

also

$$a_{n+1}=a+\frac{a_2, a_n-2a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n}.$$

Ist $A=4n+3$, so hat man daher $a_2, a_n=2a_1, a_{n-1}$, wenn a ungerade ist, und $2a_1, a_{n+1}-a_2, a_n=a_1, a_n$, wenn a gerade ist.

119.

Die Aufgabe: alle Werthe zu finden, welche der Gleichung $x^2-Ay^2=1$ Genüge leisten, ist als einzelner Fall in folgender allgemeineren enthalten. Es sei der Ausdruck $\frac{I+\sqrt{A}}{D}$ gegeben, wo $2I$, D, A ganze Zah-

len bedeuten, und $I<\sqrt{A}$, $D<2\sqrt{A}$ ist; man soll die Werthe finden, die der Gleichung

$$20.\quad x^2-Ay^2=n^2$$

Genüge leisten, wenn n den gröfsten gemeinschaftlichen Factor der drei Zahlen $2I$, D, $\frac{A-I^2}{D}=D^0$ bedeutet. Da hier von Anfang an die Werthe von I und D in Grenzen eingeschlossen sind, so mufs derselbe Werth $\frac{I+\sqrt{A}}{D}$ auch wieder vorkommen, wenn man die Entwickelung dieses Werthes durch einen Kettenbruch ausführt. Dieser Kettenbruch ist daher von Anfang an periodisch. Es seien die Glieder der Periode

$$a_1, a_2 \ldots . a_m,$$

also

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}=a+\cfrac{1}{a_1+\cdots+\cfrac{1}{a_m+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{A}+I}{D}}}}=\frac{\frac{\sqrt{A}+I}{D}a,a_m+a,a_{m-1}}{\frac{\sqrt{A}+I}{D}a_1,a_m+a_1,a_{m-1}}.$$

Hieraus findet man die zwei Gleichungen

$$\frac{A+I^2}{D^2}.a_1,a_m+(a_1,a_{m-1}-a,a_m)\frac{I}{D}=a,a_{m-1},$$

$$\frac{2I}{D_2}.a_1,a_m+\frac{a_1,a_{m-1}-a,a_m}{D}=0,$$

also

$$\frac{a_1,a_m.I}{D}=\frac{a,a_m-a_1,a_{m-1}}{2},$$

und

$$a,a_{m-1}=a_1,a_m\frac{(A-I^2)}{D^2}=\frac{a_1,a_m.D^0}{D}.$$

Man setze $a,a_m-\frac{a_1,a_m}{D}.I=\varphi$; $\frac{a_1,a_m}{D}=\psi$, so ist

$$\varphi^2-A.\psi^2=(a,a_m)^2-\frac{2a,a_m.a_1,a_m}{D}I+\frac{(a_1,a_m)^2.I^2}{D^2}-A.\frac{A.(a_1,a_m)^2}{D^2}$$

$$=(a,a_m)^2-\frac{2a,a_m.a_1,a_m}{D}I-\frac{(a_1,a_m)^2.D^0}{D}$$

$$=(a,a_m)^2-2a,a_m\frac{(a,a_m-a_1,a_{m-1})}{2}-a_1,a_m.a,a_{m-1}$$

$$=a,a_m.a_1,a_{m-1}-a_1,a_m.a,a_{m-1}=\pm 1,$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem $\frac{a,a_m}{a_1,a_m}$ gröfser oder kleiner als $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ ist, d. h. je nachdem die Anzahl

der in der Periode enthaltene Theilnenner gerade oder ungerade ist; setzt man im letzteren Falle den Kettenbruch

$$F(a+1:a_1+\ldots.+1:a_m+1:a+1:a_1+\ldots.+1:a_m)=\frac{p}{q},$$

und

$$p-\frac{q.I}{D}=\varphi',\ \frac{q}{D}=\psi',$$

so hat man

$$\varphi'^2-A\psi'^2=1.$$

Es kann nun leicht bewiesen werden, dafs im ersten oder letzten Falle bezüglich

$$n.\varphi \text{ und } n\psi \text{ oder } n.\varphi' \text{ und } n\psi'$$

die kleinsten Werthe von x und y sind, die der Gleichung (20.) Genüge leisten, und dafs man alle übrigen Werthe durch die Formeln

$$x=\frac{(n\varphi+n\psi\sqrt{A})^e+(n\varphi-n\psi\sqrt{A})^e}{2},$$

$$y=\frac{(n\varphi+n\psi\sqrt{A})^e-(n\varphi-n\psi\sqrt{A})^e}{2\sqrt{A}}$$

im ersten Falle, oder durch die Formeln

$$x=\frac{(n\varphi'+n\psi'\sqrt{A})^e+(n\varphi'-n\psi'\sqrt{A})^e}{2},$$

$$y=\frac{(n\varphi'+n\psi'\sqrt{A})^e-(n\varphi'-n\psi'\sqrt{A})^e}{2\sqrt{A}}$$

im zweiten Falle erhält. Die genaue Erörterung wird jedoch hier übergangen, um die Abhandlung nicht zu sehr auszudehnen *).

Schlüfslich möge noch Folgendes bemerkt werden. Die Eigenschaft der in der Form $4n+1$ enthaltenen Primzahlen, dafs der ihrer Quadratwurzel entsprechende Kettenbruch keinen mittleren Theilnenner enthalten kann, kann in vielen Fällen dazu dienen, diese Primzahlen von den zusammengesetzten zu unterscheiden. Ist nemlich eine Zahl $A=4n+1$ gegeben, so verwandle man $\sqrt{A}$ in den entsprechenden Kettenbruch; enthält dieser einen mittleren Theilnenner, so weifs man mit Gewifsheit, dafs A keine Primzahl ist.

---

*) Die Auflösung der Gleichung (20.) hat zuerst Gaufs gegeben (*Disq. arithm. art.* 199.); man vergleiche auch Legendre *Théorie des nombr. part.* 1. §. IX.

Zusätze.

Zu §. 17.

Eine, der hier angenommenen, ähnliche Bezeichnung hat schon Legendre gebraucht. S. *Traité de fonct. ellipt. T.* 2. *pag.* 509.

Zu §. 28.

Man vergl. Euler *Introd. in. anal. inf. Cap.* 18.

Zu §. 31.

Anmerk. Da

$$1+\frac{A_1 x^h}{\alpha_1-R}=\frac{1}{1-\frac{A_1 x^h}{\alpha_1+A_1 x^h-R}},$$

so kann man statt

$$1.\quad {}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1+\frac{A_1 x^h}{\alpha_1-\frac{A_{m-1}\alpha_m^2 . A_{m+1} . x^h}{A_m . \alpha_{m+1}+A_{m+1} . x^h . \alpha_m}}\right)$$

auch folgenden Ausdruck schreiben:

$$2.\quad {}_{1-\infty}^{\;m}F\left(\frac{1}{1-\frac{A_1 x^h}{\alpha+A_1 x^h-\frac{A_{m-1} . \alpha_m^2 A_{m+1} . x^h}{A_m . \alpha_{m+1}+A_{m+1} . x^h . \alpha_m}}}\right).$$

Aus dem Ausdrucke

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{3}{3}-\frac{4}{4}\ldots.$$

findet Euler (*Opusc. anal. T.* 2. *pag.* 155.) vermittelst der Formel (2.)

$$2=1+\frac{2}{0+\frac{3.4}{0\text{ etc.}}},$$

oder

$$2=1+\frac{2.1^2.2.4.3^2.4.6.5^2.6.8.7^2\ldots.}{1.3.2^2.3.5.4^2.5.7.6^2.7.9.8^2\ldots.},$$

und bemerkt hierbei „*cujus veritas non facile perspicitur, quoniam numeri factorum in numeratore et denominatore non aequales statui possunt, etiamsi ambo sint infiniti.*" Indessen läſst sich die Wahrheit dieses Ausdrucks ganz einfach auf folgende Weise darthun: Nimmt man das unendliche Product stückweise, so hat man

$$\frac{2.1^2.2}{1.3}=\frac{4}{3},\ \frac{2.1^2.2.4}{1.3.2^2}=\frac{1.2^2.4}{1.2^2.3}=\frac{4}{3},\ \frac{2.1^2.2.4.3^2}{1.3.2^2.3.5}=\frac{1.2^2.3^2.4}{1.2^2.3^2.5}=\frac{4}{5},$$

$$\frac{2.1^2.2.4.3^2.4.6}{1.3.2^2.3.5.4^2}=\frac{1^2.2^2.3^2.4^2.6}{1.2^2.3^2.4^2.5}=\frac{6}{5},$$

$$\frac{2.1^2\ 2.4.3^2.4.6.5^2}{1.3.2^2.3.5.4^2.5.7}=\frac{1.2^2.3^2.4^2.5^2.6}{1.2^2.3^2.4^2.5^2.7}=\frac{6}{7}\text{ etc.}$$

Überhaupt kommen im Zähler die Quadrate aller ungeraden Zahlen vor, und aufserdem kommen alle geraden Zahlen doppelt vor, so dafs $(2m-1)^2$ zwischen $2m$ und $2m$ steht. Im Nenner dagegen kommen die Quadrate aller geraden Zahlen vor, und ferner alle ungeraden Zahlen doppelt, so dafs jedes Quadrat $(2m)^2$ zwischen $2m+1$ und $2m+1$ steht. Nimmt man daher den Zähler bis zur Stelle, wo der Factor $2m$ zum ersten Male vorkommt, so wird dieser

$$=1.2^2.3^2\ldots.2(m-1)^2.2m;$$

nimmt man hierzu den Nenner bis zum Factor $2(m-1)^2$, so wird der Nenner

$$=1^2.2^2.3^2\ldots.2(m-1)^2.2m-1,$$

und der ganze Bruch

$$=\frac{1^2.2^2.3^2\ldots.2(m-1)^2.2m}{1^2.2^2.3^2\ldots.2(m-1)^2.2m-1}=\frac{2m}{2m-1}.$$

Nimmt man dagegen die Zähler bis zur Stelle, wo der Factor $2(m-1)^2$ vorkommt, so wird dieser

$$=1^2.2^2.3^2\ldots.(2m-1)^2.2m;$$

nimmt man hierzu den Nenner bis zur Stelle, wo $2m+1$ zum ersten Male vorkommt, so wird dieser

$$=1.2^2.3^2\ldots.(2m-1)^2.2m+1,$$

und der ganze Bruch

$$=\frac{1.2^2.3^2\ldots.(2m-1)^2.2m}{1.2^2.3^2\ldots.(2m-1)^2.2m+1}=\frac{2m}{2m+1}.$$

Ist nun m unendlich grofs, so fallen in beiden Fällen Zähler und Nenner zusammen, und man hat daher

$$1=\frac{2.1^2.2.4.3^2.4\ldots.}{1.3.2^2.3.5.4^2\ldots.}.$$

Zu §. 34.

An die Formel

$$(a)=(b).(c)$$

läfst sich die allgemeinere Frage knüpfen, wie man das Product zweier Kettenbrüche wieder unter der Form eines Kettenbruchs darstellen kann. Es seien die zwei Kettenbrüche

$$[1]=a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3\text{ etc.}}}} \quad \text{und} \quad [2]=A+\cfrac{B_1}{A_1+\cfrac{B_2}{A_2+\cfrac{B_3}{A_3\text{ etc.}}}}$$

gegeben: man soll einen dritten Kettenbruch

$$[3] = c + \cfrac{d_1}{c_1 + \cfrac{d_2}{c_2 + \cfrac{c_3}{d_3 \text{ etc.}}}}$$

finden, so daſs

$$[3] = [1] \cdot [2]$$

ist. Verwandelt man den Kettenbruch [1] in eine Reihe (nach §. 28.), so daſs

$$[1] = a(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots.)$$

ist, und eben so den Kettenbruch [2], so daſs

$$[2] = A(1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots.)$$

ist, so hat man bekanntlich

$$[1] \cdot [2] = aA(1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots.),$$

wo $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$; $\gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_2$; $\gamma_3 = \alpha_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \beta_3$ u. s. w. ist. Hieraus folgt (nach §. 32.)

$$[1] \cdot [2] = \left(1 + \cfrac{\gamma_1}{1 - \cfrac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_3 - \cfrac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2 + \gamma_3 - \text{etc.}}}}\right) \times a.A.$$

Es ist aber

$$\alpha_1 = \frac{b_1}{a \cdot a_1}; \quad \alpha_2 = -\frac{b_1 \cdot b_2}{a \cdot a_1 \cdot a_1, a_2}; \quad \alpha_3 = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}{a \cdot a_1, a_2 \cdot a_1, a_3} \ldots.$$

$$\beta_1 = \frac{B_1}{A.A_1}; \quad \beta_2 = -\frac{B_1 \cdot B_2}{A.A_1 \cdot A_1, A_2}; \quad \beta_3 = \frac{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3}{A.A_1, A_2 \cdot A_1, A_3} \ldots.$$

und daher

$$\gamma_1 = \frac{b_1}{a \cdot a_1} + \frac{B_1}{A.A_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{b_1 \cdot B_1}{a \cdot a_1 \cdot A.A_1} - \frac{b_1 \cdot b_2}{a \cdot a_1 \cdot a_1, a_2} - \frac{B_1 \cdot B_2}{A.A_1 \cdot A_1, a_2},$$

$$\gamma_3 = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}{a \cdot a_1, a_2 \cdot a_1, a_3} - \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot B_1}{a.a_1 \cdot a_1, a_2 \cdot A.A_1} - \frac{b_1 \cdot B_1 \cdot B_2}{a.a_1 \cdot A.A_1 \cdot A_1, A_2} + \frac{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3}{A.A_1, A_2 \cdot A_1, A_3},$$

. . . .

Wendet man diese Erörterungen auf das Beispiel des §. 34. an, indem man $[1] = (1+x)^r$, $[2] = (1+x)^n$ setzt, so ergiebt sich

$$a = 1,\ a_1 = 1,\quad a_2 = 2 + (r-1)x,\ a_3 = 3 + (r-2)x \ldots.$$
$$b_1 = rx,\ b_2 = \ -(r-1)x,\ b_3 = -2(r-2)x \ldots.$$

und

$$A = 1,\ A_1 = 1,\quad A_2 = 2 + (n-1)x,\ A_3 = 3 + (n-2)x \ldots.$$
$$B_1 = nx,\ B_2 = \ -(n-1)x,\ B_3 = -2(n-2)x \ldots.,$$

folglich

$$\gamma_1 = (r+n)x,$$
$$\gamma_2 = rnx^2 + \frac{r(r-1).x^2}{2+(r-1)x-(r-1)x} + \frac{n.(n-1)x^2}{2+(n-1)x-(n-1)x} = \frac{(r+n-1)(r+n)x^2}{2},$$
$$\gamma_3 = \frac{2r(r-1)(r-2)x^3}{2.6} + \frac{r(r-1)n.x^3}{2} + \frac{r.n(n-1)x^3}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)x^3}{2.b}$$
$$= \frac{(r+n)(r+n-1)(r+n-2)x^3}{6},$$

also

$$(1+x)^{r+n} = 1 + \cfrac{(r+n)x}{1 - \cfrac{(r+n-1)(r+n)x^2:2}{(r+n)x + \frac{(r+n-1)(r+n)x^2}{2} - \cfrac{(r+n)x.(r+n)(r+n-1)(r+n-2)x^3:6}{\frac{(r+n-1)(r+n)x^2}{2} + \frac{(r+n)(r+n-1)(r+n-2)x^3}{6}\text{ etc.}}}}$$

Hieraus findet man, nach gehöriger Reduction,

$$(1+x)^{r+n} = 1 + \cfrac{(r+n)x}{1 - \cfrac{(r+n-1)x}{2+(r+n-1)x - \cfrac{2(r+n-2)x}{3+(r+n-2)x\text{ etc.}}}},$$

wie schon §. 34. gefunden wurde.

Auf ähnliche Weise würde man auch einen Kettenbruch finden können, der dem Producte von mehr als zwei Kettenbrüchen gleich wäre.

Verbindet man das hier über die Multiplication der Kettenbrüche Gesagte mit der Bemerkung, daſs man jede ganze Zahl, und zwar auf verschiedene Weise, in einen Kettenbruch, der ohne Ende fortläuft, verwandeln kann, so kann man hierdurch eine Menge von Formeln ableiten. So z. B. ergiebt sich aus dem Ausdrucke $m = \frac{n.m}{n-m+m}$ die Formel

$$[4] \quad m = \cfrac{nm}{n-m+\cfrac{nm}{n-m+\cfrac{nm}{n-m\text{ etc.}}}} \qquad \text{(vergl. §. 65.).}$$

Hieraus läſst sich schon manche merkwürdige Beziehung finden. Setzt man z. B. $n = m+1$, so hat man $m = \cfrac{m.m+1}{1+\cfrac{m.m+1}{1+\text{etc.}}}$ (wie man auch finden würde, wenn man den ganzen Kettenbruch $= x$ setzte, weil alsdann $x = \frac{m.m+1}{1+x}$ wäre). Setzt man $n = m+2$, so hat man

$$[5] \quad m = \cfrac{m.m+2}{2+\cfrac{m.m+2}{2+\text{etc.}}};$$

eben so ist

$$[6] \quad r = \cfrac{r.r+2}{2+\cfrac{r.r+2}{2+\text{etc.}}},$$

also

$$[5].[6] = mr = \cfrac{mr.mr+2}{2+\cfrac{mr.mr+2}{2\text{ etc.}}},$$

und wenn man eine gröſsere Anzahl von ganzen Zahlen m, r, s, t, ... in Kettenbrüche verwandelte, so fände man auf dieselbe Weise

$$\cfrac{m.m+2}{2+\cfrac{m.m+2}{2\text{ etc.}}} \times \cfrac{r.r+2}{2+\cfrac{r.r+2}{2\text{ etc.}}} \times \cfrac{s.s+2}{2+\cfrac{s.s+2}{2\text{ etc.}}} \times \ldots = \cfrac{(mrs\ldots)(mrs\ldots+2)}{2+\cfrac{(mrs\ldots)(mrs\ldots+2)}{2\text{ etc.}}},$$

Diese Betrachtungen lassen sich in's Unendliche fortsetzen, bieten aber weiter keine Schwierigkeit dar, und können daher hier abgebrochen werden.

Auf eine andere Weise kann jede ganze Zahl in einen Kettenbruch vermittelst der Formel $m = m-1+\frac{m}{m}$ verwandelt werden, aus welcher man

$$[7] \quad m = m-1+\cfrac{m}{m-1+\cfrac{m}{m-1\text{ etc.}}}$$

findet. Es böte sich hier auch die Gelegenheit dar, mancherlei interessante Reihen zu entwickeln; der Kürze halber möge hier nur folgende Platz finden. Setzt man in Formel [7] für m den Werth 2, so hat man

$$2 = 1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1\text{ etc.}}}};$$

verwandelt man diesen Kettenbruch nach (§. 28.) in eine Reihe, so findet man

$$2 = 1+\frac{2}{1}-\frac{2^2}{1.3}+\frac{2^3}{3.5}-\frac{2^4}{5.11}+\frac{2^5}{11.21}-\ldots.$$

Das Gesetz, nach welchem diese Reihe fortgeht, ist einleuchtend

Eine andere Formel, vermöge welcher man eine ganze Zahl in einen Kettenbruch verwandeln kann, ist auch folgende:

$$[8] \quad m = m+1-\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m}{m+1\text{ etc.}}},$$

welche man aus $m = m+1-\frac{m}{m}$ ableiten kann (vergl. §. 62.).

Verbindet man nun eine der Formeln [4], [7], [8] mit irgend einem bekannten Kettenbruche durch Multiplication, so kann man hierdurch eine

unzählige Menge neuer Kettenbrüche finden. Jedoch muſs der Verfasser gestehen, daſs er auf diesem Wege, gegen Erwarten, nur sehr verwickelte Ausdrücke gefunden hat, selbst wenn die einfachsten Verbindungen angewandt wurden. Es soll z. B. der Kettenbruch

$$1 = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 \text{ etc.}}}$$

(den man aus Form. [8] erhält, wenn man $m = 1$ setzt) mit dem Kettenbruche

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1.2}{1 + \cfrac{2.3}{1 + \cfrac{3.4}{1 \text{ etc.}}}}} \qquad \text{(§. 49. Form. 5.)}$$

multiplicirt werden. Setzt man den ersten Kettenbruch $= [1]$, den zweiten $= [2]$, so hat man

$$a = 2,\ a_1 = 2,\ a_1,\ a_2 = 3,\ a_1,\ a_3 = 4,\ a_1,\ a_4 = 5,\ \ldots.$$
$$b_1 = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = -1,\ b_4 = -1,\ \ldots.$$
$$A = 1,\ A_1 = 1,\ A_1,\ A_2 = 3,\ A_1,\ A_3 = 9,\ A_1,\ A_4 = 45,\ \ldots.$$
$$B_1 = 1,\ B_2 = 1.2,\ B_3 = 2.3,\ B_4 = 3.4,\ \ldots.$$

mithin

$$\gamma_1 = \frac{3}{4},\ \gamma_2 = -1,\ \gamma_3 = \frac{35}{72},\ \gamma_4 = -\frac{53}{90},$$

und

$$\frac{\pi}{2} = 1 \times \left(1 + \cfrac{\frac{3}{4}}{1 + \cfrac{1}{-\frac{1}{4} - \cfrac{\frac{3}{4} \cdot \frac{35}{72}}{-\frac{37}{72} - \cfrac{\frac{53}{90}}{-\frac{74}{720} \text{ etc.}}}}}\right) = 2 \times \left(1 + \cfrac{3}{4 - \cfrac{4.4}{1 - \cfrac{3.35}{37 - \cfrac{53.72.8}{74 \text{ etc.}}}}}\right);$$

Zu §. 49.

Verwandelt man das unendliche Product

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{17} \cdots\cdots$$

nach Formel (4.) in einen Kettenbruch, so findet man

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdot = 1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1.2}{4 - \cfrac{2.3}{7 - \cfrac{4.5}{11 - \cfrac{6.7}{17 - \cfrac{10.11}{23 \text{ etc.}}}}}}};$$

nun ist aber

$$1 = \cfrac{1}{2 - \cfrac{2}{4 - 2}},\quad 2 = \frac{2.3}{7-4},\quad 4 = \frac{4.5}{11-6},\quad 6 = \frac{6.7}{17-10},\quad 10 = \frac{19.11}{23-12} \text{ etc.}$$

also

$$1 = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1.2}{4 - \cfrac{2.3}{7 - \cfrac{4.5}{11 \text{ etc.}}}}} \qquad \text{(vergl. §. 65.)},$$

also

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdots\cdot = 0,$$

wie schon Euler gefunden hat. (*Introd. in. anal. inf. T.* 1. §. 277.)

Zu §. 53.

Zu den convergenten Kettenbrüchen rechne ich auch diejenigen, welche sich einem bestimmten Werthe oder einem anderen bestimmten Werthe nähern, je nachdem man $2n$ oder $2n+1$ Theilbrüche zur Berechnung anwendet. Diese Kettenbrüche entsprechen den Reihen, bei welchen man sich einem bestimmten Werthe oder einem anderen bestimmten Werthe immer mehr nähert, je nachdem man $2n$ oder $2n+1$ Glieder zur Berechnung anwendet. Eine solche Reihe ist z. B. die folgende:

$$(A) = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} \text{ etc.}$$

Vereinigt man je zwei auf einander folgende Glieder, so geht die Reihe (A) in folgende über:

$$(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \cdots\cdot = \text{log. nat. } 2.$$

Das allgemeine Glied der Reihe (A) ist $\frac{m+1}{m}$, so daſs die einzelnen Glieder sich mehr und mehr der Einheit nähern, und wenn man $m = \infty$ setzt, wird der letzte Theil der Reihe

$$= +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ etc.}$$

sein. Daher wird der Werth der Reihe (A) gegen den bestimmten Werth log. nat. 2. oder gegen den Werth log. nat. $2+1$ convergiren, je nachdem man eine gerade oder ungerade Anzahl von Gliedern zur Berechnung anwendet. Man kann aber jede convergirende Reihe in eine der Reihe A ähnliche Reihe verwandeln, wenn man zwischen je zwei Gliedern die Glieder $+1-1$ einschaltet. Solche Reihen könnte man allenfalls zweideutige convergirende Reihen nennen; in keinem Falle dürfen sie aber wohl zu den divergirenden Reihen gerechnet werden. Verwandelt man nun eine solche Reihe nach §. 31. in einen Kettenbruch, so muſs dieser ein zweideutiger convergirender Kettenbruch sein, d. h. ein Kettenbruch, dessen Werth sich immer mehr einem bestimmten oder einem andern bestimmten Werthe nähert, je nachdem man eine gerade oder ungerade Anzahl von Theilbrüchen zur Berechnung anwendet. Hiernach ist das, was in §. 54. gesagt worden ist, zu ergänzen. Sind nemlich bei einem zweideutigen convergirenden Kettenbruche alle Theilzähler und Theilnenner positiv, so kommt man allerdings auch dem wahren Werthe desto näher, je mehr Glieder man zur Berechnung anwendet; da aber ihr wahrer Werth zweideutig ist, oder da die Reihe, so zu sagen, zwei wahre Werthe hat, so kommt man bald dem einen, bald dem andern näher. So z. B. ergiebt sich aus der Reihe (A) der zweideutige convergirende Kettenbruch

$$\cfrac{2}{1+\cfrac{1^2.3}{1+\cfrac{2^2.4}{1+\cfrac{3^2.5}{1 \text{ etc.}}}}},$$

welchen Kettenbruch schon Euler (*Opusc. anal. T.* 2. *pag.* 156.) gefunden hat (nur daſs er den Werth der Reihe $(A) = \text{log. nat. } 2 + \frac{1}{2}$ setzt, was aber offenbar nur das Mittel aus den zwei Werthen log. 2. und log. $2+1$ ist). Keineswegs kann ich mich aber zur Ansicht des Herrn von Ettingshausen bekennen, der solche Kettenbrüche als divergirende betrachtet (vergl. dessen Vorles. über die höh. Mathem. Bd. 1. S. 72.).

Zu Kap. 5. *B.*

Da hier gezeigt wird, wie man die gröſste und kleinste Wurzel, wenn sie reell sind, oder die zwei gröſsten und kleinsten Wurzeln, wenn sie imaginär sind, direct finden kann, so erwächst hieraus zugleich eine wesentliche Verbesserung der Methoden, die Legendre zur Auflösung der Gleichungen gegeben hat, im Anfange zu seiner *Théorie des nombres*,

wenn überhaupt diese Methoden nach dem Erscheinen von Fourier's *Analyse des équations* noch einen Vorzug haben. Noch leichter können diese Wurzeln durch die Methode gefunden werden, die ich im Journale für die Mathem. Bd. 9. S. 305. ff. gegeben habe.

Die Anwendung der Kettenbrüche auf die Auflösung der Differenzialgleichungen, wiewohl sie manche Schriftsteller als besonders wichtig hervorheben, ist wissentlich in dieser Abhandlung übergangen worden. Sie beruht nemlich auf keinem besonderen Principe, sondern auf einer Substitutionsmethode, ähnlich der, die in §. 87. angewandt worden ist. Ist z. B. eine Differenzialgleichung zwischen den zwei veränderlichen Gröfsen x und y gegeben, die durch

$$F(x, y) = 0$$

ausgedrückt wird, so suche man einen Näherungswerth von y, er sei $= a$; man setze alsdann $y = a + \frac{1}{y^1}$, und substituire diesen Werth statt y in $F(x, y)$, so erhält man eine neue Gleichung $F(x, y_1) = 0$; hier kann man wieder einen Näherungswerth von y_1 finden, es sei dieser a_1; alsdann kann man wieder statt y^1 den Werth $a_1 + \frac{1}{y_2}$ substituiren, und fährt man so fort, so wird der Werth von y durch einen Kettenbruch $F(a + 1 : a_1 + 1 : a_2 \text{ etc.})$ ausgedrückt. Wiewohl Lagrange diese Methode besonders empfiehlt, (*Mém. de l'ac. de Berlin* 1776.), so geht doch schon aus dem, was mehrmals über das Verhältnifs der verschiedenen Entwickelungen in unendlich fortlaufenden Ausdrücken erinnert worden ist, hervor, dafs im Allgemeinen solche Entwickelungen vor anderen keinen Vorzug haben können, da sie unter einander nur der Form, nicht aber dem Wesen nach verschieden sind, und so ist wohl auch die Methode, Differenzialgleichungen durch Hülfe der Kettenbrüche aufzulösen, der längst bekannten Methode, die dasselbe durch unendliche Reihen leistet, nicht vorzuziehen, da, besonders bei den Kettenbrüchen, die Bestimmung des vernachlässigten Restes so wichtig und in den meisten Fällen so schwierig ist. Dies hat auch schon Legendre bemerkt (*Exerc. du calc. intégr. T.* 2. *pag.* 223.).

Eine wichtige Bemerkung über Kettenbrüche von Jacobi, die aufserhalb des Planes dieser Abhandlung liegt, findet man im Journ. f. d. Math. Bd. 7. S. 41. ff., und eben daselbst S. 48. — 50. interessante Bemerkungen von Hill.

Druckfehler.

S. 2 Z. 10 v. u. statt 11 lies 1.1
— 4 — 2 v. u. st. a^m l. a_m
— 7 — 7 v. o. st. a_m, a_1 l. a_m, a
— 9 — 3 v. u. st. oder da l. oder, da
— 10 — 7 v. o. st. $-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right)^{m+1}$ l. $-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}$
— — Anmerk. l. überall $2r$ st. 27
— 11 Z. 9 v. o. st. (I.) l. (§. 3.)
— 12 — 1 v. o. st. $a_1, a_m =$ l. a, a_{m-1}
— — — 27 v. o. st. a, a_{1-m} l. a, a_{m-1}
— 13 — 23 v. o. st. a_i, a_m l. a_l, a_m
— 14 — 3 v. o. st. b_{m+n} l. b_{m+1}
— — — 12 v. o. st. a_{m+1} l. a_{m-1}
— — — — - - st. b_{m+1} l. b_{m-1}
— 15 — 6 v. u. st. a, a_{m+1} l. a, a_{m+n}
— 16 — 1 v. o. st. b_{i+1} l. b_{l+1}
— — — 19 v. o. st. ...287 l. ...2587
— — — 20 v. o. st. 9 l. q
— — — 23 v. o. st. $\geq$ l. $>$
— 18 — 10 v. o. st. also $F(a, a_{m-1})$, so l. also $F(a, a_{m-1})$ gröfser als $\frac{m}{n}$, so
— 19 — 10 v. o. st. $> F(a, a_m)$ l. $< F(a, a_m)$
— — — 26 v. o. st. a, a_m l. $F(a, a_m)$
— — — 30 v. o. st. $b . \frac{b_1}{a_1}$ l. $\frac{b_1}{a_1}$
— 20 — 3 v. u. st. gerade oder ungerade l. ungerade oder gerade
— 24 — 15 v. o. st. b_{m+1} l. $b_m + 1$
— 27 — 4 v. o. st. Z_1 l. Z_2
— 28 — 6 v. o. st. a_{m+1}, a_{4m-1} l. a_{2m+1}, a_{4m-1}
— 29 — 8 v. o. st. $a_{rm+1} . a_{(r+2)m-1}$ l. $a_{rm+1}, a_{(r+2)m-1}$
— — — 11 v. o. st. a, a_{m-1} l. a_1, a_{m-1}
— — — 12 v. o. st. a_{rm-1} l. a_{rm+1}
— — — 14 v. o. st. (7) l. (8)
— — — 23 v. o. st. C l. B
— — — 27 v. o. st. $a_{m-2}, a,$ l. a_{m-2}, a_1
— — — 29 v. o. st. $+ b_1 . a_{m+2}, a_1$ l. $- b_1 . a_{m-2}, a_1$
— 32 — 16 v. o. st. $\frac{b_1}{a_2}$ l. $\frac{b_1}{a_1}$
— 36 — 12 v. o. st. $F(a_1, a_m)$ l. $F(a, a_m)$
— 37 — 12 v. o. müssen die Worte: welcher Bruch .... ist, gestrichen werden.
— — — 13 v. o. st. $(1+x)^{-1}$ l. $(1+x)^{-n}$
— 38 — 7 v. o. st. $-m+3n+(m+2n)$ l. $-(m+3n)+(m+2n)$
— — — 19 v. o. st. $\overset{r}{1-\infty}$ l. $\overset{m}{1-\infty}$
— — — — - - st. $n-m$ l. $r-m$
— — — 20 v. o. st. $\overset{n}{1-\infty}$ l. $\overset{m}{1-\infty}$
— 39 — 5 v. u. st. $F(a_1 + x : a_2 \ldots.)$ l. $F(a_2 + x : a_3 \ldots.)$
— 41 — 14 v. u. st. $\frac{Q}{Q_1 a_m + q}$ l. $\frac{Q}{Q_1 a_m + q_1}$

S. 43 Z. 4 v. u. st. $\frac{N_{m-2}}{N_m}$ l. $\frac{N_{m-1}}{a_m}$
— 54 — 1 v. o. st. Arbeit l. Entwickelung
— 56 — 11 v. o. st. $c+2m.c+2m-1$ l. $c+2m.c+2m+1$
— — — 6 v. u. st. $\frac{2}{3}\,\mathrm{tang}^3.t$ l. $\frac{2}{3}\,\mathrm{tang}^4.t$
— 57 — 14 v. o. st. (a, b, c, x) l. $\varphi(a, b, c, x)$
— — — 21 v. o. st. $\varphi(a+1, b-1; c, x)=0$ l. $=1$
— 59 — 2 v. o. st. $\frac{2.2}{1.5}$ l. $\frac{1.2}{1.3}$
— 71 — 9 v. o. st. $\frac{b_m}{b_m}$ l. $\frac{b_m}{a_m}$
— 127 — 6 v. u. st. die Wurzeln l. zwei Wurzeln
— 142 — 9 v. o. st. $+1:2$ l. $+1:z$
— 144 — 22 v. o. st. $\chi(x_{n+r})$ l. $\chi(x_{n+1})$
— — — 25 v. o. st. ∂x^r_{n+r} l. ∂x^r_{n+1}
— — — 27 v. o. st. $\frac{\partial^{r+1}\chi(x_{n+1})}{\partial x^{r+2}_{n+1}}$ l. $\frac{\partial^{r+2}\chi(x_{n+1})}{\partial x^{r+2}_{n+1}}$
— 150 — 4 v. o. st. $\frac{zp^1-q^0}{zp^1-q^0}$ l. $\frac{zp^1+p^0}{zq^1+q^0}$
— 159 letzte Zeile l. Bd. 9. S. 305.
— 162 Z. 6 v. o. st. so findet man aus (C) l. .... aus (C_1)
— 166 — 12 v. u. st. $\alpha^n_r.\alpha^n_2$ l. $\alpha^n_r.\alpha^n_s$
— — — 11 v. u. st. $\alpha_r+\alpha_2$ l. $\alpha_r+\alpha_s$
— 169 — 1 u. Z. 2 v. u. und S. 170 Z. 1 v. o. st. $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r)$ l. $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s)$
— 177 — 3 u. 4 v. o. sind die Puncte am Ende der Zeilen zu streichen.
— 182 — 7 v. o. st. $b_1(a, a_m - a_1, a_{m-1})b^2.a, a_{m-1}$ l. $b(a, a_m - a_1, a_{m-1}) - b^2.a, a_{m-1}$
— 183 — 13 v. u. st. $x^2-\gamma$ l. $x^4-\gamma$
— 188 — 6 v. u. ist das etc. zu streichen.
— 191 — 4 v. o. st. die gröfste Zahl l. die gröfste ganze Zahl
— 205 — 3 v. o. st. $\frac{2n(n-1)(n-2)x^3}{2.b}$ l. $\frac{2n(n-1)(n-2)x^3}{2.6}$
— 208 — 8 v. u. st. $+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}$ etc. l. $-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}$ etc.

Zwei §. §. sind aus Versehen beide mit 116 bezeichnet.

S. 199 sind die Worte: oder $I_1^2 > A-4$ bis mithin zu streichen, statt dessen lese man: nun ist $I+I^1 = a_n D$; wäre daher $D=2a$ oder $=2a-1$, so müfste in jedem Falle jede der Gröfsen I und I_1 gröfser als $a-2$ sein, da keine derselben gröfser als a sein kann: ist aber $D<2a-1$, und setzt man $A=a^2+m$, $D=2a-(r+1)$, so ist

$$I_1^2 = a^2+m-4a+2r+2,$$

aber

$$(a-2)^2 = a^2-4a+4,$$

mithin in jedem Falle

$$I_1 > a-2.$$



